

«بسم الله الرحمن الرحيم»

«مسائل SST و الگوریتم کروسکال»

پایان نامه دوره کارشناسی

میلاذ افشین منش

پست الکترونیکی: mafshinm@yahoo.com

آدرس وب سایت اینترنتی: www.mafshinm.com

دانشگاه علم و صنعت ایران - دانشکده ریاضی

سال تحصیلی: ۸۶ - ۱۳۸۵

دیباچه:

در دنیای اطراف ما وضعیت های فراوانی وجود دارند که می توان توسط نموداری متشکل از یک مجموعه نقاط به علاوه خطوطی که برخی از این نقاط را به یکدیگر متصل می کنند به توصیف آنها پرداخت. این خطوط وابسته به نوع ارتباط این نقاط که دو طرفه یا یکطرفه باشد می تواند ساده یا جهت دار بوده و بر طبق چنین تقسیم بندی ای، گرافهای ساده و جهتدار بوجود آید.

گرافهایی که در عمل با آنها برخورد می کنیم غالباً ساختاری بسیار عمومی داشته و مساله اصلی یافتن الگوریتمی برای حل کارای مساله بهینه مرتبط با آنهاست که در این میان شبکه ها سهمی درخور توجه داشته و آگاهی از تکنیکهای شبکه ای دارای ضرورتی جدی است.

شبکه یا network گراف سوداری است که عناصرش به صورت فعالیت ها و پیشامدها بیان می شود. فعالیت ها یا activities فرایندهای جزئی یا بخش هایی از کار هستند که قسمت هایی از زمان (durations of time) متناظر با آنها هستند. پیشامدها یا events دستیافت های مراحل جداگانه فرایند یا رخداد مراحل جداگانه انجام اند که در تناظر با لحظه های زمان قرار می گیرند.

نقش تکنیکهای شبکه ای، نمایش، تحلیل و بهینه کردن روند فرایندهای پیچیده است و همانند بنا کردن ساختمان های بزرگی است که از چندین فرآیند جداگانه تشکیل شده اند.

اهداف تکنیکهای شبکه ای عبارتست از: طرح زمان پایان و زمان های میانی و جستجوی زمانهای اضافی برای فرآیندهای جزئی، تعیین سودمندترین دنباله فرآیندهای جزئی برای کوتاه کردن زمان کل، کاهش هزینه و اصلاح بهره گیری از ظرفیت، گسترش دستگاه کنترل (control system) و محدودیت مسئولیت و غیره.

اگر فعالیت ها و پیشامدها را با یالها و گره های شبکه مربوطه نمایش داده باشیم آنگاه شبکه ما، شبکه ای پیشامد-جهتدار یا event-oriented network است.

بالعکس این مطلب آنست که اگر فعالیت ها توسط گره ها و استقلال فعالیت ها را با کمک یال ها نشان دهیم آنگاه شبکه ما، شبکه فعالیت-جهتدار یا activity-oriented network است.

به طور معمول وابستگی فعالیت ها عبارت است از این واقعیت که پیش از آغاز یک فعالیت باید فعالیت قبلی پایان یافته باشد.

John E Beasley استاد رشته تحقیق در عملیات دانشگاه برونل لندن غربی، و یکی از اعضای جامعه تحقیق در عملیات انگلستان در مجموعه مقالاتی تحت عنوان OR-Notes به بیان مسائلی در این حیطه از نظریه گرافها پرداخته است.

فهرست

مقدمه	۵
شکل گیری یک نظریه	۷
پیمایش درخت ها	۹
طراحی شبکه	۱۶
مسائل اقلیدسی	۲۱
کوتاه ترین مسیر	۲۵
برنامه ریزی مالیاتی چند ملیتی	۲۷
مثال هایی از نظریه گراف و آزمون ۱۹۹۵ UG	۳۰
مثال هایی از نظریه گراف و آزمون ۱۹۹۱ UG	۳۳
مثال هایی از نظریه گراف و آزمون ۱۹۸۵ UG	۳۵
مثالی از نظریه گراف	۳۹
فرجام	۴۱

مقدمه:

بطور کلی نظریه گراف با مسائلی سروکار دارد که دارای ساختار شبکه ای می باشند. بطور آشکار

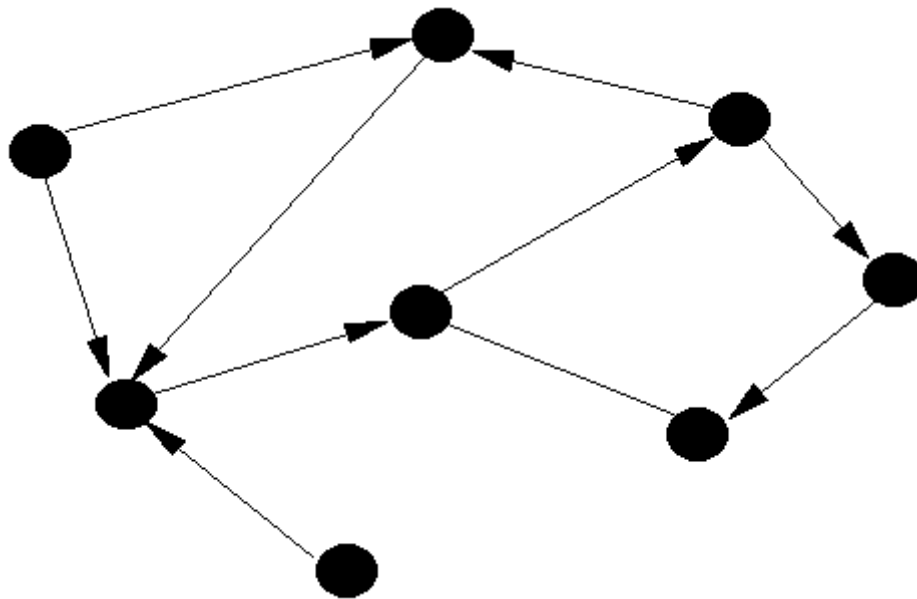
هر گراف از موارد زیر تشکیل شده است:

الف) رئوس یا گره ها که مجموعه ای از نقاط می باشند

ب) کمان ها که نقاط را به هم متصل کرده و ممکنست جهتدار یا غیرجهتدار باشند. نوع غیرجهتدار

آن را پیوند یا یال می گویند.

مثالی از گراف بصورت زیر می باشد:



نظریه گراف عموماً با مسائلی سروکار دارد که دارای یک ساختار طبیعی شبکه ای مانند هستند. به

عنوان مثال:

- شبکه راه های یک کشور که در آن شهرها یا چهارراه ها در نقش گره ها و یال های

گراف، همان جاده ها می باشند.

- شبکه ارتباطی و سیستم مخابراتی که در آن هر مرکز مخابرات همانند رئوس این گراف عمل کرده و خطوط ارتباطی بین مراکز نقش یال ها را بر عهده خواهد داشت.

- شبکه های کامپیوتری

- برنامه ریزی مالیاتی چند ملیتی یا تغییرات ارزشهای خارجی (شبکه مالیاتی در گردش کشور)

در چنین مواردی، مساله کمترین هزینه شبکه موجود، از جمله مسائلی است که با نظریه گراف ارتباط مستقیم دارد و در این شاخه از ریاضیات مورد بحث قرار می گیرد.

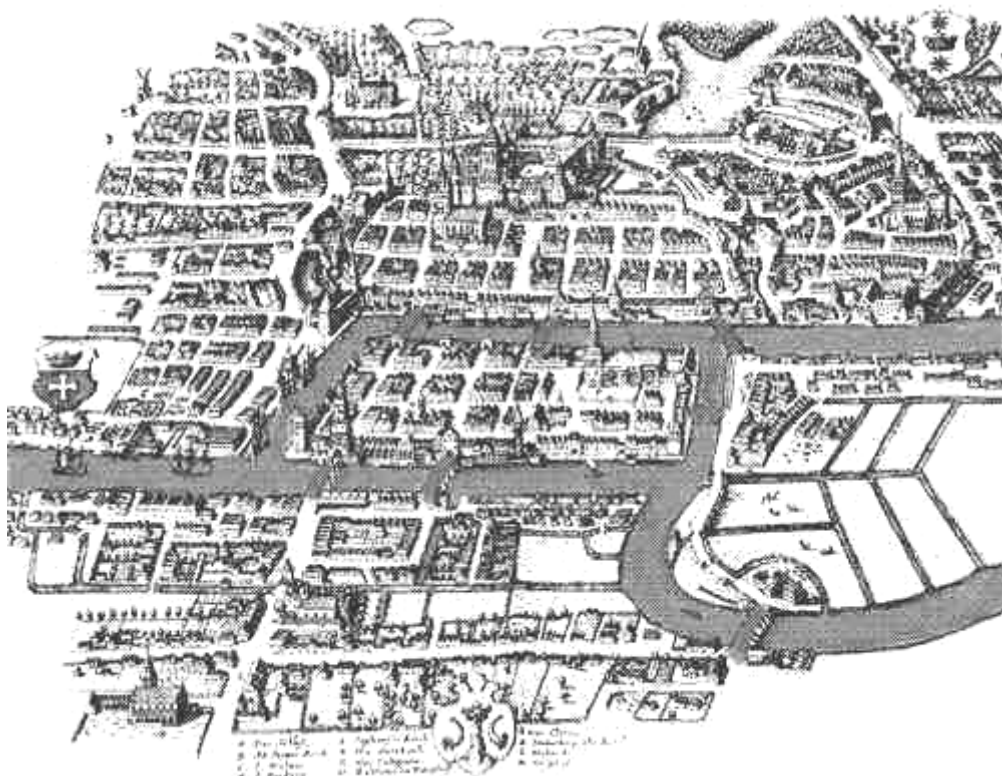
بد نیست توجه کنیم که کمترین هزینه شبکه جاری¹ که در این درس مورد بحث قرار می گیرد نمونه ای از یک مساله با ساختار شبکه ای است.

برخی از شما ممکنست این مقاله را تحت وب مطالعه کنید. این شبکه نیز نمونه ای از یک گراف است که در آن فایل ها و مستندات نقش رئوس را بازی کرده و لینک ها و پیوندهای بین مستندات (که با کلیک کردن روی آنها از جایی به جای دیگر می روید) در نقش یال ها ظاهر خواهند شد.

¹ <http://people.brunel.ac.uk/~mastjib/jeb/or/netflow.html>

شکل گیری یک نظریه:

نظریه گراف در تاریخ ریاضیات کلاسیک قدمتی طولانی دارد. در سال ۱۷۳۶ لئونارد اویلر در پی حل مساله پل های شهر کونیگسبرگ در آلمان، این نظریه را بنیان نهاد. در این مساله برخی از افراد شهر می خواستند با پیمودن تمام پل های موجود بر روی رودخانه پرگل^۱ و عدم طی کردن بیش از یک بار یک پل به نقطه اولیه خود بازگردند.



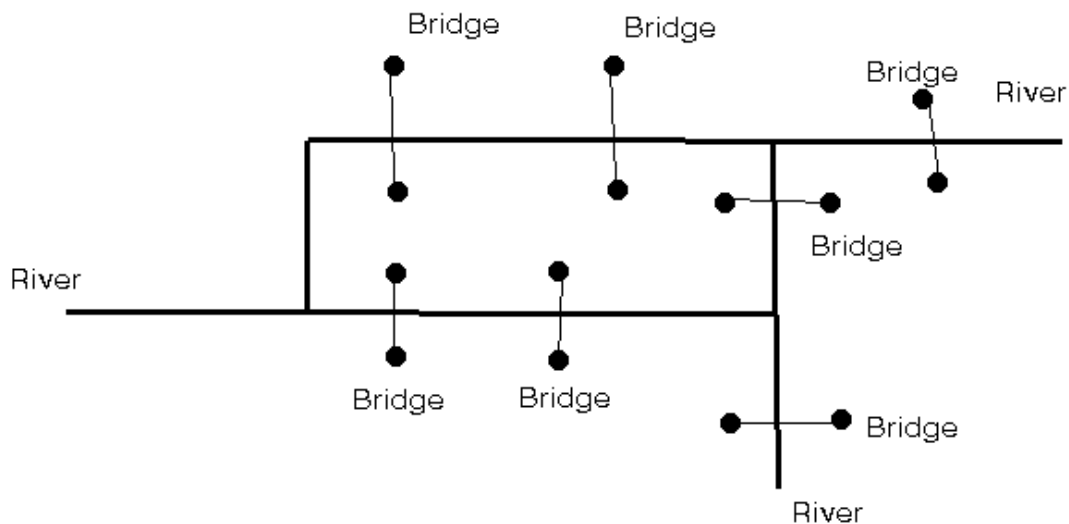
نقشه شهر کونیگسبرگ از آرشیو کتاب تاریخ ریاضیات^۲ Mac Tutor

کمی فکر کنید و ببینید آیا می توانید به همان نتیجه ای که اویلر رسید برسید؟ شکل زیر نقشه این شهر را بصورت ساده شده نشان می دهد و در آن تنها رودخانه و پل ها نمایش داده شده اند. آیا

^۱ Pregel

^۲ <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html>

فکر می کنید کسی می تواند با گذشتن از تمام هفت پل و بدون عبور از پلی تکراری به جای اولیه خویش بازگردد؟



حوزه الگوریتم ها در نظریه گراف (الگوریتم هایی که برای حل مسائل نظریه گراف به کار می روند) در نیمه دهه ۱۹۷۰ با کارهای نیکوس کریستوفیدز^۱ از دانشکده مدیریت امپریال کالج لندن^۲، شهرت یافته و از آن زمان تا کنون روز بروز بر شهرتش افزوده می شود.

توضیح آنکه الگوریتم کریستوفیدز یک الگوریتم ابتکاری برای پیدا کردن یک جواب نزدیک به جواب بهینه، برای مساله فروشنده دوره گرد است.^۳

در این مقاله ما به دو مساله از نظریه گراف توجه می کنیم که در آن پیمایش درخت ها و یافتن کوتاه ترین مسیر بطور جزئی و دقیق و نگاهی اجمالی به مساله برنامه ریزی مالیات چند ملیتی مدنظر است.

برای مقالات بیشتر در زمینه نظریه گراف می توانید به سایر منابع معرفی شده^۴ مراجعه کنید.

^۱ Nicos Christofides

^۲ <http://people.brunel.ac.uk/~mastjib>

^۳ <http://www.nist.gov/dads/HTML/christofides.html>

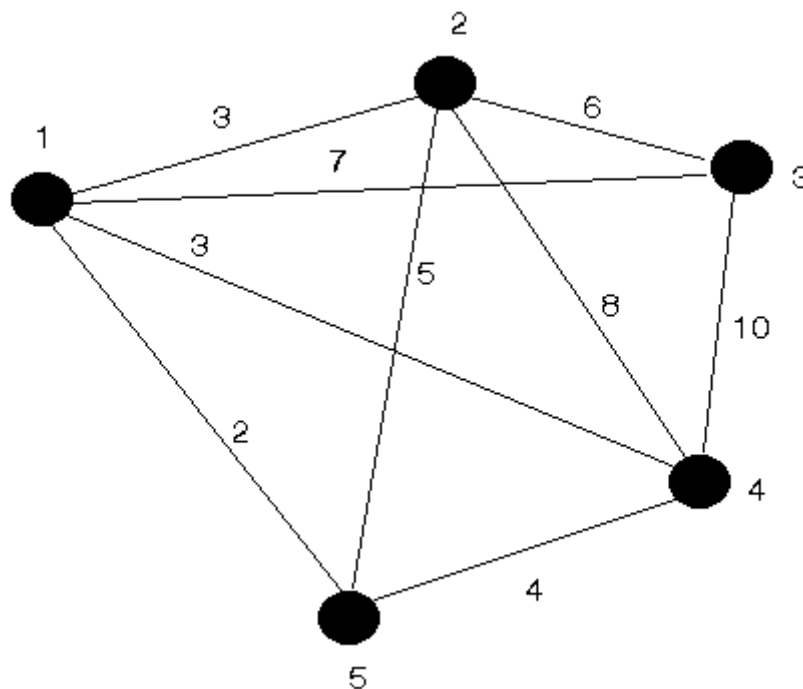
^۴ <http://www.math.fau.edu/locke/graphthe.htm>

پیمایش درخت ها:

تعریف: یک زیر گراف پیوسته و غیر حلقه ای از گراف که تمام رئوس آن را در برگیرد را پیمایش آن گراف یا درخت گویند.¹

اکنون به مساله زیر توجه کنید. در دیاگرام نمایش داده شده در شکل زیر ۴ حلقه چاه نفتی دریایی داریم (رئوس ۱ تا ۴) و یک پایانه نفتی ساحلی (راس ۵) این ۴ حلقه چاه در این میدان نفتی باید با کمک خطوط لوله به یکدیگر و همچنین به پایانه نفتی ساحلی متصل گردند.

خطوط لوله مختلفی که می تواند ایجاد شود در دیاگرام زیر با کمک یال های این گراف نمایش داده شده است و هزینه ایجاد هر یک از این خطوط لوله نیز در کنار آن یال ذکر شده است. کدام یک از این خطوط لوله را برای ساختن پیشنهاد می کنید؟



بدیهی است که این مثال خاص نمونه کوچک و ویژه ای از یک سری عمومی تری از این مسائل است که آنها را گراف می نامند. (همانند آنچه در بالا نشان داده شده است)

¹ <http://www.nist.gov/dads/HTML/spanningtree.html>

آن خطوط لوله ای که مورد استفاده ما می باشد باید دارای ویژگی های زیر باشند:

- هزینه تمام شده شبکه خطوط مورد استفاده کمترین مقدار ممکن باشد.

- تمام نقاط به یکدیگر متصل شده باشند.

این مساله به نام مساله کوتاهترین پیمایش درخت (SST)¹ نامیده می شود. توجه داشته باشید که

واژه کوچکترین پیمایش درخت (MST)² نیز گاهی به جای اصطلاح کوتاهترین پیمایش درخت

به کار می رود.

تعریف: درختی با کمترین وزن ممکن در یک گراف وزندار که شامل تمامی رئوس آن گراف باشد

را کوچکترین (کوتاهترین) پیمایش درخت یا MST (SST) می نامند.³

به عنوان مثال یکی از مسیرها و ساختارهای ممکن برای حل این مساله، اتصال تمام نقاط این

گراف از طریق یال های ۱-۲ و ۲-۳ و ۳-۴ و ۴-۵ و ۵-۱ است. اما با کمی دقت متوجه می شویم

که ساختارهای دیگری برای اتصال این نقاط به یکدیگر وجود دارد که از نظر هزینه تمام شده

کمتر از هزینه ساختار فوق الذکر است. (به عنوان مثال یکی از این ساختارها از حذف یکی از یال

های این حلقه، بدست می آید. این گفته بدین معناست که با بر هم زدن حلقه ۱-۲-۳-۴-۵ باز

هم شرایط مساله برای اتصال تمام نقاط به یکدیگر برقرار می باشد)

نکات قابل توجه در حل این مساله به شرح زیر است:

- برای گرافی با n راس جواب نهایی دارای $n-1$ یال خواهد بود.

¹ Shortest Spanning Tree

² Minimal Spanning Tree

³ <http://www.nist.gov/dads/HTML/minimumSpanningTree.html>

- راه حل مساله با کمک گرفتن از الگوریتمی که منسوب به کروسکال¹ است به آسانی

بدست می آید. (این الگوریتم در نیمه دهه ۱۹۵۰ توسعه داده شد)

- ساختار نهایی بدست آمده، کوتاهترین پیمایش درخت مربوط به گراف مورد نظر یا SST

آن گراف نام خواهد داشت.

ما در ذیل این مقاله توجه خود را به الگوریتم کروسکال برای پیدا کردن کوتاهترین پیمایش درخت

از گراف مربوطه، معطوف خواهیم نمود.

تعریف: برای گرافی با n راس، الگوریتم کروسکال به شرح زیر می باشد: افزودن یال هایی با

کمترین هزینه را تا آنجایی ادامه دهید که علاوه بر اجتناب از پدید آمدن حلقه یا دور در گراف

مزبور، $n-1$ یال نیز اضافه شود.

توجه کنید که الگوریتم کروسکال برای گرافهایی به کار می رود که یال های آن غیرجهتدار باشد.

برای گرافی که در بالا نشان داده شده است، الگوریتم کروسکال را به کار می بریم و از کوتاهترین

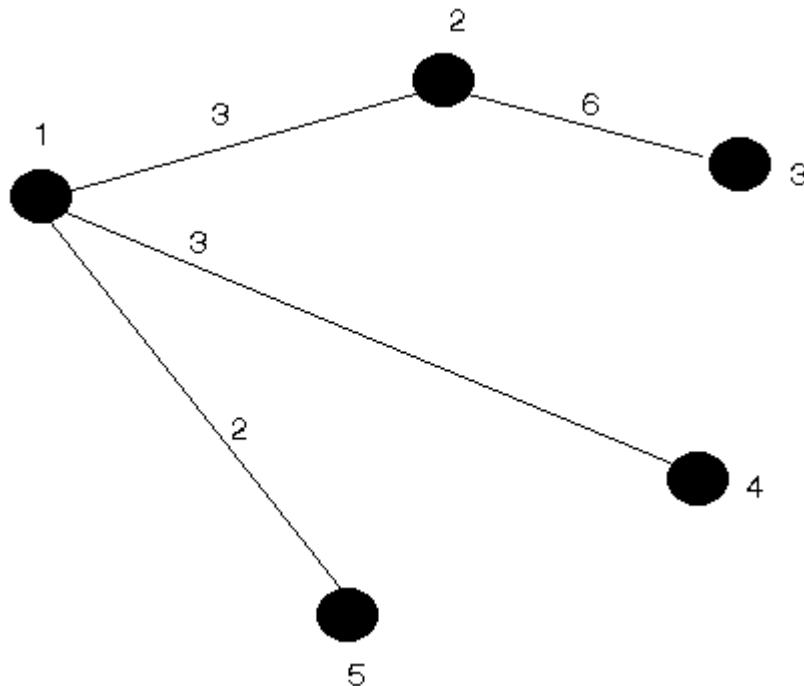
یال آغاز می کنیم (یالی با کمترین هزینه) و خواهیم داشت:

یال	هزینه	تصمیم
۵-۱	۲	اضافه کن به درخت
۲-۱	۳	اضافه کن به درخت
۴-۱	۳	اضافه کن به درخت
۴-۵	۴	حذف بدلیل تشکیل مدار ۱-۴-۵-۱
۲-۵	۵	حذف بدلیل تشکیل مدار ۱-۲-۵-۱
۳-۲	۶	اضافه کن به درخت

¹ Kruskal

بدلیل افزوده شدن ۴ یال توقف کن! و این تمام چیزی است که برای بدست آوردن یک SST نیاز داشتیم.

بنابراین SST گرافی که در بالا نمایش داده شد شامل یال های ۱-۵ و ۱-۲ و ۱-۳ و ۲-۳ و با هزینه نهایی ۱۴ واحد پولی می باشد. این SST در پایین نمایش داده شده است.



در به کار گیری الگوریتم کروسکال گاه با حالت هایی مواجه می شویم که در آن دو یا چند یال دارای هزینه یکسان بوده و قیمت تمام شده ما با انتخاب هریک از آنها تغییری نخواهد کرد. در چنین موقعیتی انتخاب کدام لینک مهم نیست. زیرا برای یک مساله ممکن است SST های مختلف وجود داشته باشد و SST های مختلف نتیجه انتخاب یال های مختلف است. اما توجه داریم که با انتخاب هریک از این یالها هزینه بدست آمده در پایان کار، کمترین مقداری است که می تواند بدست آید.

مساله ای که در بالا توضیح داده شد می تواند توسط یک بسته نرم افزاری¹ مانند زیر حل شود.

¹ <http://people.brunel.ac.uk/~mastj/bjeb/or/software.html>

نخستین جدول شامل اطلاعات ورودی ما به این برنامه است:

From \ To	Node1	Node2	Node3	Node4	Node5
Node1		3	7	3	2
Node2	3		6	8	5
Node3	7	6		10	
Node4	3	8	10		4
Node5	2	5		4	

که در آن Node ها معادل با رئوس این گراف بوده و خانه های جدول هزینه های لازم برای ایجاد خطوط انتقال نفت را نشان می دهد.

نتیجه تحلیل نرم افزار بر روی این داده ها و اجرای الگوریتم کروسکال بر روی گراف، بصورتی که می بینید، دارای خروجی زیر خواهد بود:

09-19-2000	From Node	Connect To	Distance/Cost		From Node	Connect To	Distance/Cost
1	Node1	Node2	3	3	Node1	Node4	3
2	Node2	Node3	6	4	Node1	Node5	2
	Total	Minimal	Connected	Distance	or Cost	=	14

ردیف اول بیانگر انتخاب اتصال راس اول به راس دوم با هزینه ۳ واحد پولی، ردیف دوم بیانگر انتخاب اتصال راس دوم به راس سوم با هزینه ۶ واحد پولی، ردیف سوم بیانگر انتخاب اتصال راس اول به راس چهارم با هزینه ۳ واحد پولی و ردیف چهارم بیانگر انتخاب اتصال راس اول به راس پنجم با هزینه ۲ واحد پولی می باشد.

آخرین ردیف نشان دهنده آنست که کمترین هزینه تمام شده ممکن، برای این شبکه، ۱۴ واحد پولی می باشد.

محدودیت اساسی در لوله کشی شبکه مزبور (در موارد عملی) این است که این نکته باید در نظر گرفته شود که برخی لوله ها نفت بیشتری حمل می کنند و بنابراین قطر بیشتری داشته و گرانترند (در هر واحد طولی)

همچنین یک شبکه لوله کشی، وابسته به میزان حجم نفتی که باید حمل کند، دارای تفاوت قیمت خواهد بود. اما ما نمی دانیم که هر لوله خاص چه میزان نفت را حمل خواهد کرد تا آن زمان که در مورد کل شبکه تصمیم گیری کنیم.

استفاده مجدد و تکراری از محاسبات SST راهی برای مساله طراحی خطوط لوله بطور تجربی فراهم می کند. به طور نمونه ما باید برای هر خط لوله، قیمتی را در نظر بگیریم، سپس :

- مساله SST را حل کنیم.
- حجم نفتی که در هر خط لوله باید حمل شود را بدست آوریم.
- با همان روند سابق هزینه خط لوله را تنظیم و تعدیل کرده و مجدداً کار را تکرار کنیم.

سایر مشکلات موجود بصورت زیر می باشد:

- مخلوط شدن نفت با درجه های کیفیتی مختلف
- گازهای خروجی از چاه های نفتی
- استفاده از کمپرسورها برای حفظ فشار در لوله های انتقال
- مشکلات جغرافیایی و سیاسی برای کشیدن خطوط لوله از مسیرهایی که مورد نظر ماست.
- آسیب پذیری بالای شبکه نسبت به ایجاد نقص یا آسیب در یکی از خطوط لوله یا یکی از راس های این گراف
- متغیر بودن نفت استخراجی از چاه ها در بازه های زمانی مختلف در طی سال

کاربرد پیشرفته مدل های SST در طراحی شبکه خط لوله، در اوایل دهه ۱۹۶۰ در شبکه لوله کشی خلیج مکزیک بود که ذخیره ده ها میلیون دلار را در پی داشت. این طراحی نشان می دهد که

چگونه در OR مسائل نظری خوش خیم، می توانند همانند آجرهای سازنده ای برای حل مسائل

تجربی پیچیده باشند.

طراحی شبکه:

مسائل مذکور می توانند به عنوان مسائل طراحی شبکه مورد توجه قرار گیرند. مسائلی این چنین، معمولاً از یکسری نقاط مشخص و متمایز و یک سری اتصال بین این نقاط بوجود آمده اند و هدف آنها یافتن یک طراحی مناسب برای اتصال این نقاط به یکدیگر با کمترین هزینه ممکن و برآورده شدن تعدادی شرط و ضابطه مساله می باشد.

امروزه این مسائل دارای اهمیت زیادی بوده و بطور خاص در صنعت ارتباطات مورد توجه است. در ساده ترین انواع آنها نقاط یا رئوس داده شده است و هر اتصال بین این نقاط وابسته به میزان استفاده از آنها دارای هزینه ای می باشد. هدف اصلی این مسائل، یافتن پاسخ این سوال است که کدام اتصال ها باید برقرار شود تا کمترین هزینه ممکن در کنار اطمینان از پیوستگی شبکه، بدست آید. این مساله بوضوح از جمله مسائلی است که با SST در ارتباط است.

عوامل دیگری که در این میان می تواند رخ دهد چنین است:

- جریان های مشخصی که بین هر جفت از رئوس و ظرفیت های مشخصی که برای هر خط لوله وجود دارد.
- ممکنست ما به شبکه ای احتیاج داشته باشیم که همان پیوستگی را در صورت آسیب دیدن یک اتصال داشته و آن را حفظ کند.

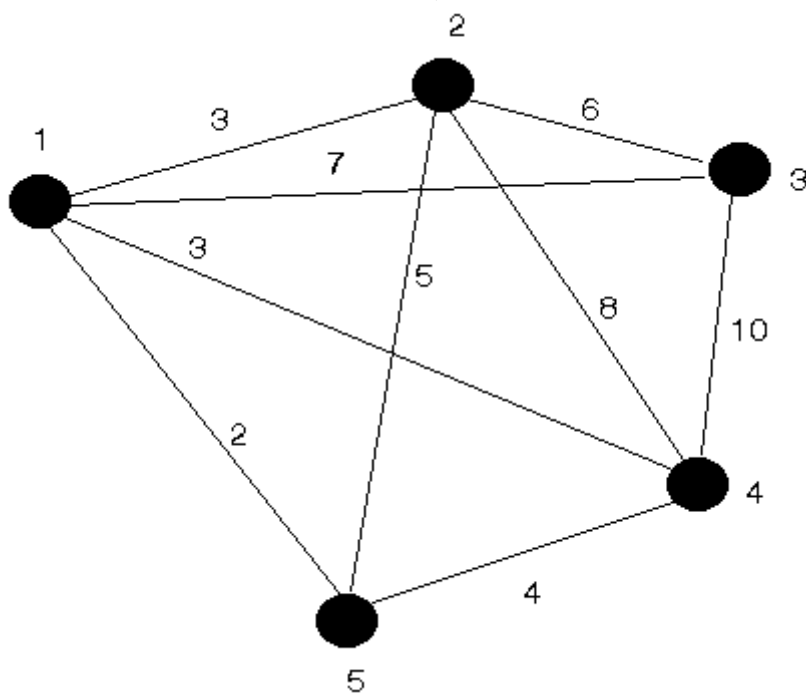
به طور کلی ما می توانیم دو نوع اتصال یا همبندی برای گراف تعریف کنیم:

- یک گراف دارای همبندی راسی مرتبه k است اگر حداقل تعداد رئوسی که باید حذف کنیم تا گراف ناهمبند شود k تا باشد.

- یک گراف دارای همبندی یالی مرتبه k است اگر حداقل تعداد یالی که لازمست حذف شود تا گراف ناهمبند شود k تا باشد.

منظور از ناهمبندی آنست که گراف باقیمانده به ۲ یا تعداد بیشتری بخش جدا از هم تبدیل شود. به عنوان مثال SST مذکور در مثال پیشین دارای همبندی راسی مرتبه ۱ و همبندی یالی مرتبه ۱ است.

برای مساله خط لوله ای که به آن توجه کردیم و مجدداً آن را در پایین نمایش داده ایم:



- شبکه ای با همبندی یالی مرتبه ۲ چیست؟
 - هر مداری می تواند یک جواب این مساله باشد. (یک پیمایش رئوس که در آن هیچ یالی بیش از یک بار مورد استفاده نباشد) این مدار دارای همبندی یالی مرتبه ۲ است.
- شبکه ای با همبندی یالی مرتبه ۳ چیست؟
 - یکی از پاسخ ها در نظر گرفتن شبکه اولیه است، بدون یال ۱-۲. که همبندی یالی مرتبه ۳ دارد.

- کمترین هزینه تمام شده مربوط به شبکه ای با همبندی یالی مرتبه ۲ چیست؟

- پاسخ بسیار ساده به این سوال اینست: نمی دانم! اما این یک سوال معتبر است و ممکنست با تعمق و تفکر بیشتر بر روی ساختار این شبکه بتوانیم پاسخ آن را بدست آوریم.

- شبکه ای با کمترین میزان آسیب پذیری نسبت به یال های آن کدامند؟ به عنوان مثال:

شبکه ای با بیشترین مرتبه همبندی یالی؟

- بهترین شبکه با کمترین میزان آسیب پذیری نسبت به ایجاد نقص در یال های آن شبکه ای است که تمام اتصال های ممکن آن برقرار شده باشد. یعنی در واقع برای هر دو نقطه ای که امکان ایجاد اتصال باشد این کار انجام شود.

بنابراین جایگزین آشکاری برای شبکه ای با کمترین میزان آسیب نسبت به ایجاد

نقص در یال ها (که البته گرانترین شبکه موجود خواهد بود)، برقراری تمام اتصال

های ممکن است که هزینه آن بالغ بر ۴۸ واحد پولی خواهد بود.

یکی از مسائل طراحی شبکه که در ارتش ایالات متحده رخ داد مساله سیم کشی مجدد یک کشتی

جنگی بود. در این مساله برای مراکز ارتباطی داده شده در درون این کشتی کدام شبکه از خطوط

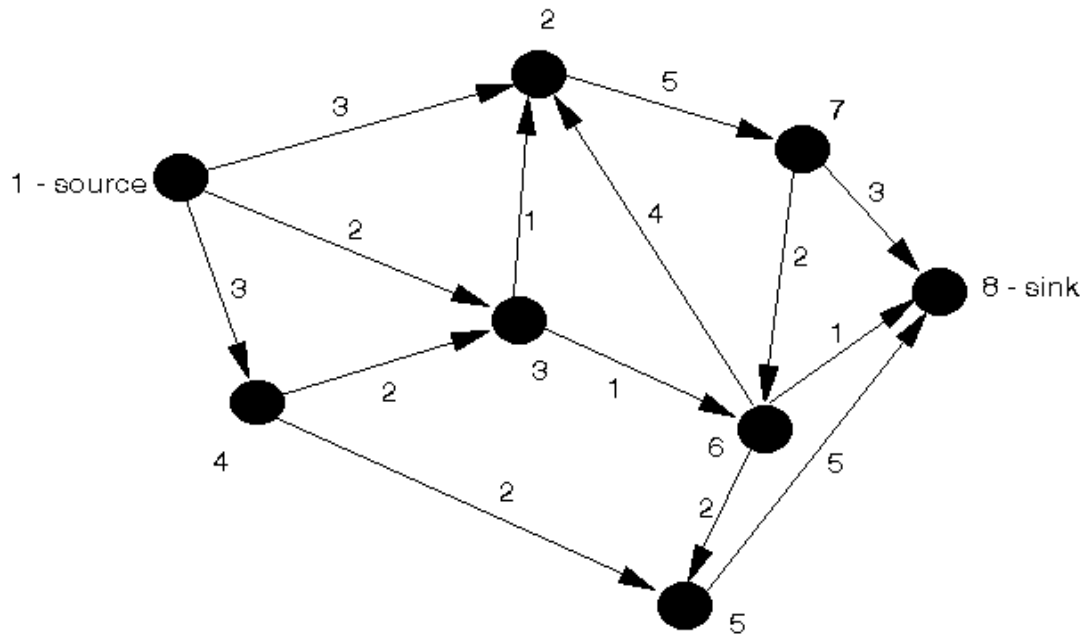
ارتباطی باید ایجاد شود تا در برابر حملات متشابه از سوی دشمن، ارتباطات داخلی این ناو جنگی

محفوظ و برقرار بماند؟

عکس این مساله نیز در خور توجه است و آن اینست که یک شبکه را مورد آسیب قرار دهیم و

بینیم آیا شرایط مزبور رخ می دهد یا خیر؟

به عنوان مثال برای شبکه ای مانند زیر که عدد نوشته شده در کنار هر یال ، هزینه مربوط به حذف آن یال را نشان می دهد، کدام یال را باید از شبکه خارج کنیم تا با کمترین هزینه ممکن، منبع ۱ از مقصد ۸ جدا شود؟

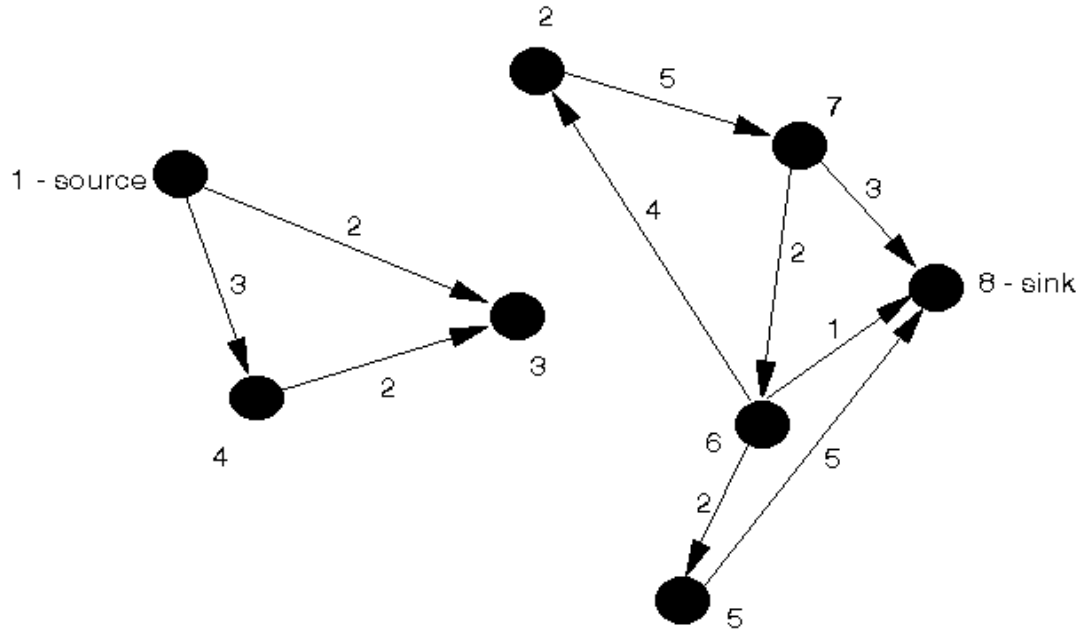


جواب این مساله در شکل بعدی نشان داده شده است.

این جواب می تواند از حل این مساله به عنوان یک مساله کمترین جریان ممکن، که هزینه هر یال به عنوان ظرفیت آن لینک در نظر گرفته می شود، بدست آید.

برای اطلاعات بیشتر در مورد مساله بیشترین جریان ها «شبکه جریان ها»¹ را ببینید.

¹ <http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/or/netflow.html>

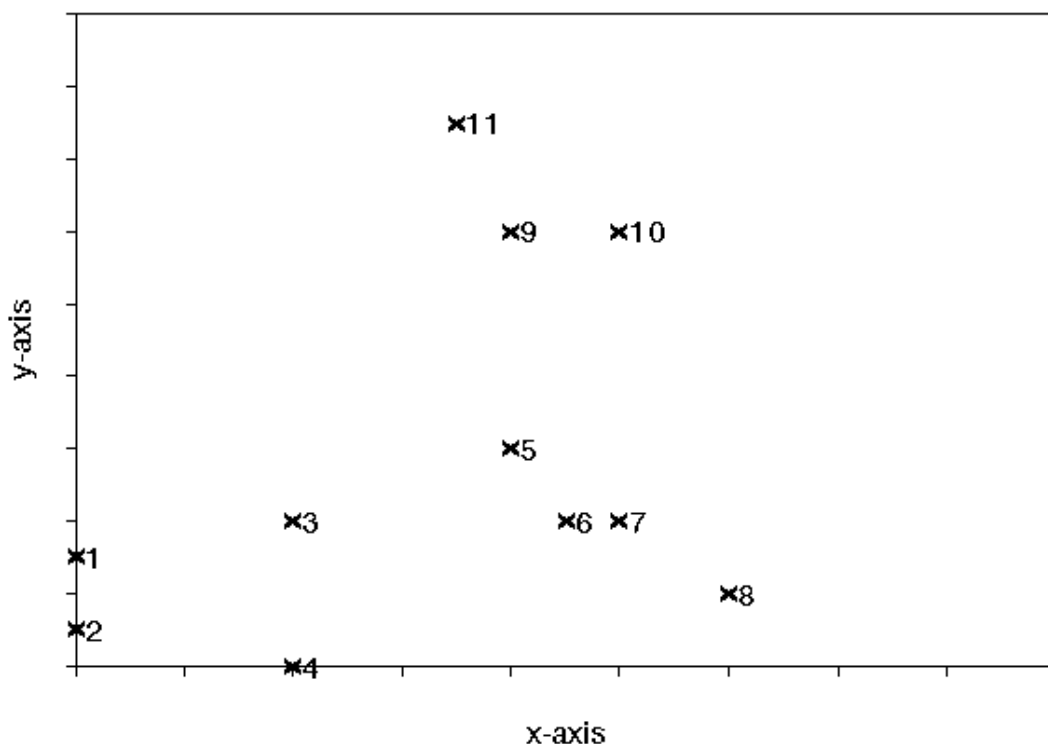


با کمترین هزینه ممکن ، منبع ۱ را از مقصد ۸ جدا کرده ایم.

مسائل اقلیدسی

توجه داشته باشیم که الگوریتم کروسکال فقط برای مسائلی به کار نمی رود که در آن ها یال های بین رئوس بطور صریح داده شده باشد. (مانند مثالی که در بالا ذکر شد).

این الگوریتم همچنین برای انواع مسائل اقلیدسی از نوعی که در پایین نشان داده شده است نیز به کار می رود. (که در آن هر جفت از نقاط می توانند به یکدیگر متصل شوند)



اکنون الگوریتم کروسکال را برای گرافی که در بالا نمایش داده شده به کار می بریم.

مختصات X و Y برای نقاطی که در بالا نشان داده شده است به صورت زیر می باشد:

مختصات	نقطه
(۰۳)	۱
(۰۱)	۲
(۴۴)	۳
(۴۰)	۴
(۸۶)	۵

مختصات	نقطه
(۹و۴)	۶
(۱۰و۴)	۷
(۱۲و۲)	۸
(۸و۱۲)	۹
(۱۰و۱۲)	۱۰
(۷و۱۵)	۱۱

اکنون الگوریتم کروسکال را با شروع از کمترین طول ممکن به کار می بریم:

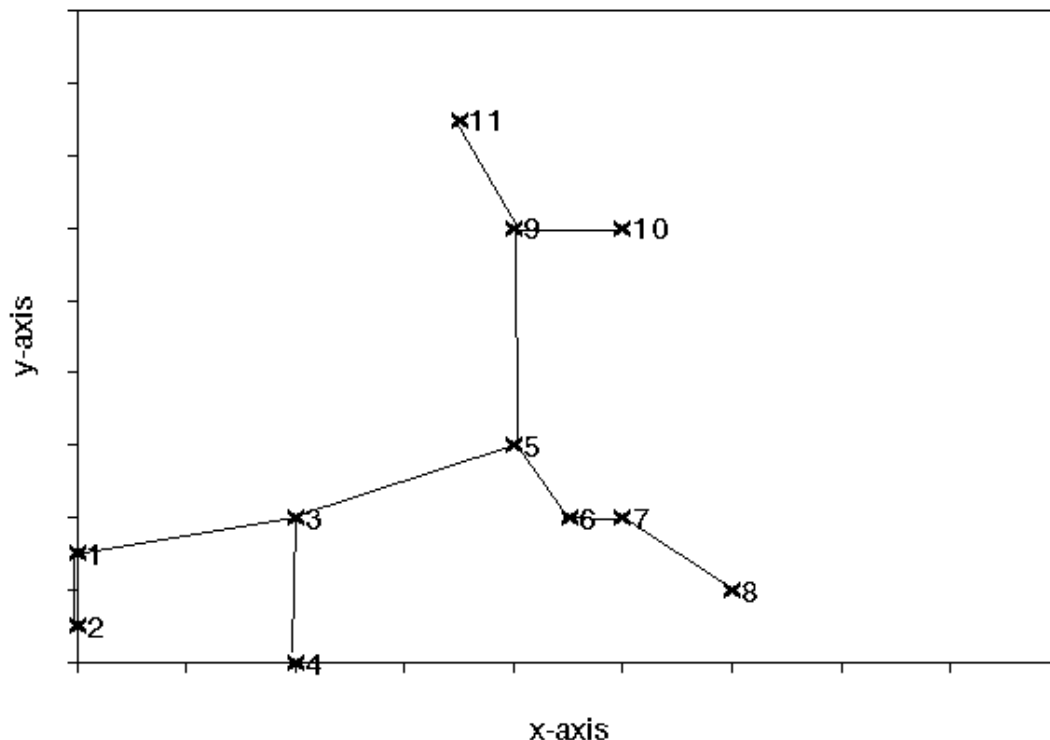
لینک	طول	تصمیم
۷-۶	۱	اضافه شود
۲-۱	۲	اضافه شود
۱۰-۹	۲	اضافه شود
۶-۵	۵	اضافه شود
۸-۷	۸	اضافه شود
۷-۵	۸	ابطال! تشکیل مدار ۵-۷-۶-۵
۱۱-۹	۱۰	اضافه شود
۸-۶	۱۳	ابطال! تشکیل مدار ۶-۸-۷-۶
۴-۳	۴	اضافه شود
۳-۱	۱۷	اضافه شود
۴-۲	۱۷	ابطال! تشکیل مدار ۲-۴-۳-۱-۲

و این روند را تا زمان رسیدن به SST نشان داده شده در شکل صفحه بعد ادامه می دهیم.

توجه داریم که این SST دارای طول نهایی ۳۱/۸۲ واحد خواهد بود و لینک های زیر را در

برخواهد داشت:

۷-۶ و ۲-۱ و ۱۰-۹ و ۶-۵ و ۸-۷ و ۱۱-۹ و ۴-۳ و ۳-۱ و ۵-۳ و ۵-۹



توجه داریم که در مسائل اقلیدسی SST ما به طور ضمنی این فرض را داریم که فقط می توانیم رئوس گراف را از طریق رئوس موجود به هم متصل کنیم. اما اگر اجازه داشته باشیم که رئوس تازه ای به گراف اضافه کنیم آنگاه ما به دنبال کوتاهترین درخت/استینر هستیم و این رئوس تازه ، رئوس/استینر نام خواهد داشت.

تعریف: نقطه ای که بخشی از گراف نبوده و ما تنها آن را برای ساخت درخت استینر به گراف اضافه می کنیم نقطه یا راس استینر نام دارد¹.

تعریف: در یک گراف وزندار غیرجهتدار یا برای نقاطی در فضا، درختی با کمترین وزن ممکن که که آن نقاط مشخص شده -که ترمینال نامیده می شوند- را بهم متصل کرده باشد، درخت استینر نام دارد².

¹ <http://www.nist.gov/dads/HTML/steinervtx.html>

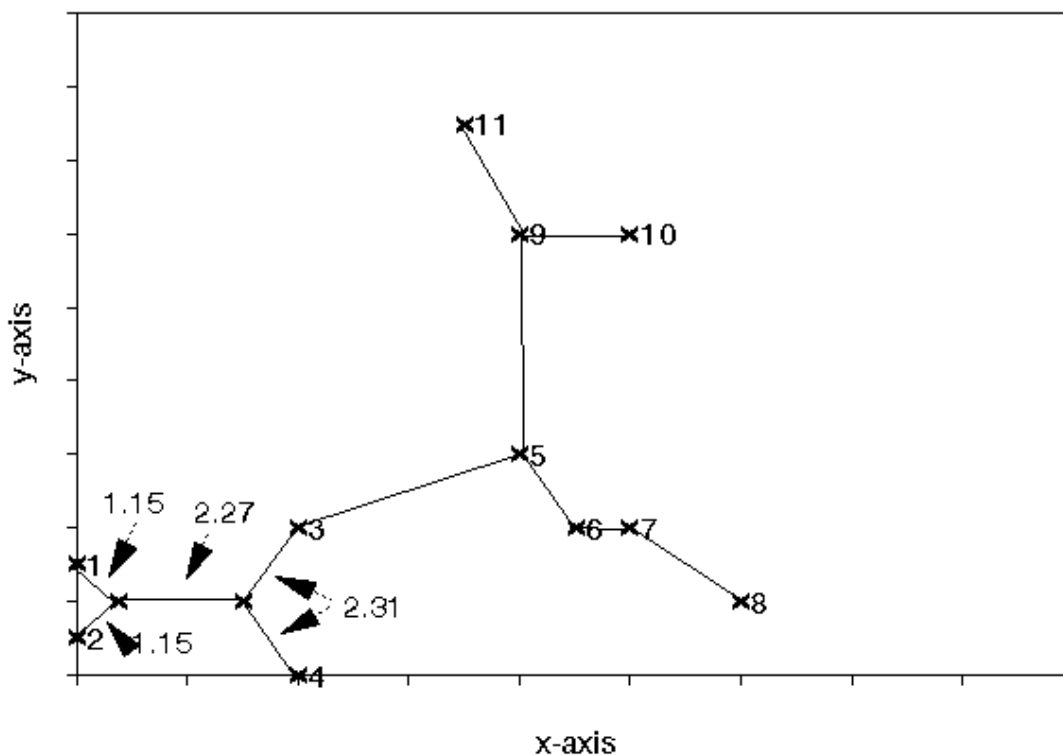
² <http://www.nist.gov/dads/HTML/steinertree.html>

توجه داریم که ما رئوسی را به گراف اضافه می کنیم که با افزودن آنها به جوابی برسیم که از SST مزبور دارای هزینه تمام شده کمتری باشد.

در حین افزودن نقاط استینر به گراف و تعیین تعداد آنها و نیز موقعیت آنها که عملی دشوار¹ است، خوبست این نکته مد نظر قرار گیرد که در مسائل اقلیدسی هر راس استینر دارای سه لینک در اطراف خودش با زوایای ۱۲۰ درجه خواهد بود.

اکنون اگر رئوس گفته شده را اضافه کرده و حاصل کار را ترسیم کنیم می بینیم که رئوس استینر طول مجموع را از $31/82$ واحد به $30/89$ واحد کاهش داده اند.

توجه داریم که ممکنست رئوس دیگری نیز موجود باشد که با افزودن آنها به درخت، طول مجموع، باز هم کمتر از این مقدار شود.

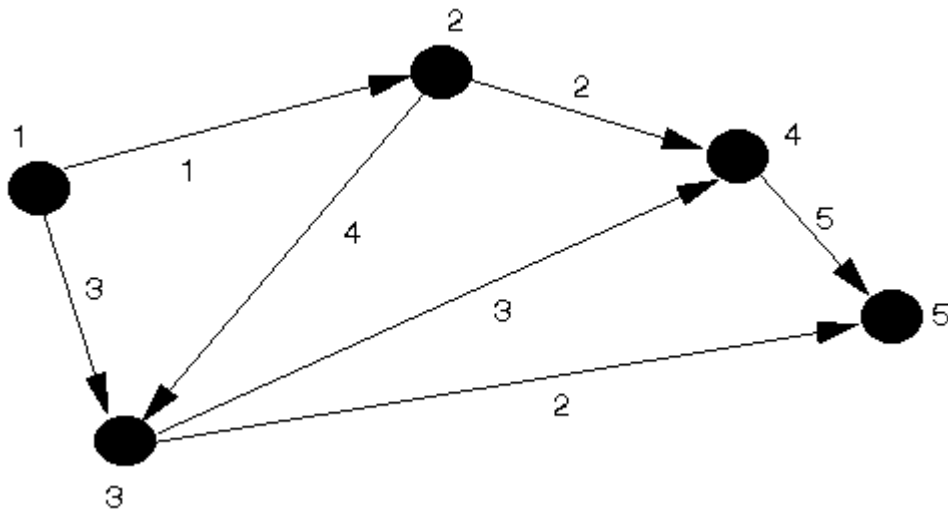


نقاط استینر در دیاگرام بالا با کمک علامت ضربدر مشخص شده اند.

¹ <http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/jeb.html#steiner>

کوتاهترین مسیر

به دیاگرام زیر توجه کنید. در این دیاگرام عدد کنار هر یال طول آن را نشان می دهد با داشتن این فرض که راهی برای رفتن از راس ۱ به راس ۵ موجود است، این سوال طرح می شود که برای پیمایش از راس ۱ به راس ۵ کوتاهترین مسیر کدام است؟



بوضوح در مورد چنین نمونه کوچکی می توانیم با جستجو و بررسی کردن و شمردن تمام مسیرهای ممکن بین راس ۱ و ۵ جواب مساله را بیابیم. اما اگر گراف بسیار بزرگتر باشد دیگر این رویکرد عملی نخواهد بود!

در گراف هایی که دارای یال هایی با طول های نامنفی هستند ، الگوریتمی برای یافتن کوتاهترین مسیر وجود دارد. این الگوریتم که توسط دیجسکترا^۱ در اوایل دهه ۱۹۶۰ توسعه داده شد روشی برای حل این مسائل بدون شمردن ضمنی تمام مسیرهای ممکن بین رئوس خواسته شده را به دست می دهد. الگوریتم فوق بر مبنای روشی به نام برنامه ریزی پویا می باشد.

ما در اینجا قصد تمرکز کردن بر این الگوریتم و توضیح آن را نداریم. بلکه از یک بسته نرم افزاری برای یافتن کوتاه ترین مسیر بین رئوس ۱ و ۵ در گراف مزبور استفاده می کنیم.

^۱ Dijkstra

ورودی و خروجی این بسته نرم افزاری¹ برای گرافی که در بالا نشان داده شده بصورت زیر است:

From \ To	Node1	Node2	Node3	Node4	Node5
Node1		2	3		
Node2			4	2	
Node3				3	2
Node4					5
Node5					

ورودی های داده شده به این نرم افزار

09-19-2000	From	To	Distance/Cost	Cumulative Distance/Cost
1	Node1	Node3	3	3
2	Node3	Node5	2	5
	From Node1	To Node5	Distance/Cost	= 5

خروجی گرفته شده از این نرم افزار

نمونه ای از مجموعه نرم افزاری مفید برای الگوریتم کوتاهترین مسیر،² Auto route Express است که شامل نقشه گرافیکی شبکه جاده های انگلستان است.

به کار بردن الگوریتم کوتاه ترین مسیر، ما را قادر می سازد تا برنامه ای برای ماشین های حمل و نقل باری با توجه به کوتاه ترین مسیر ممکن و کوتاه ترین زمان توقف بین دو ایستگاه بین راهی طراحی کنیم.

این کار با تقسیم جاده ها به قطعات و نسبت دادن سرعت مشخصی برای خودرو در هر قطعه از جاده میسر است.

برای ارائه ایده ای جهت زمان لازم برای انجام محاسبات این کار توسط کامپیوترها، باید بگوییم که یافتن کوتاهترین مسیر بین دو نقطه دلخواه از نقشه جاده های انگلستان در کسری از ثانیه میسر و ممکن است.

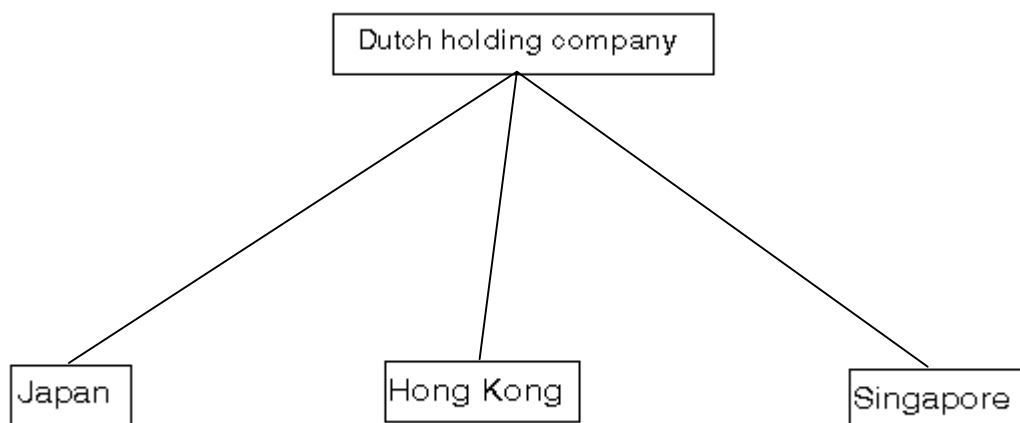
¹ <http://people.brunel.ac.uk/~mastjib/jeb/or/software.html>

² <http://www.microsoft.com/autoroute/>

برنامه ریزی مالیاتی چند ملیتی

برای طرح ریزی مساله مالیاتی چند ملیتی، ما باید از یک مثال ساختاری برای یک شرکت چند ملیتی (مثلا مانند این که در پایین نشان داده شده است) استفاده کنیم.

یک شرکت دارایی آلمانی و سه شرکت تابعه که در ژاپن و هنگ کنگ و سنگاپور قرار دارند را در نظر می گیریم.



نمایی از شرکت دارایی آلمانی و سه شرکت تابعه آن در هنگ کنگ و سنگاپور و ژاپن

اقتصاد جاری بین این سه شرکت و آنچه برای ما مورد توجه است می تواند در سه محور زیر بطور خلاصه چنین بیان شود:

- سود سهام (که باید به سهامداران پرداخته شود)
- حق امتیاز و بهره برداری (که برای فرآیند تولید و اجازه فعالیت باید پرداخته شود)
- بهره (ناشی از وام یا قرض)

وقتی یک چرخه مالی و اقتصادی بین این شرکت ها رخ می دهد ، برای شرکت های تابعه که در کشورهای مختلف هستند رفتارهای مالیاتی هر شرکت (به عنوان مثال مقدار مالیاتی که هر کدام از این شرکت ها باید پردازد) بر اساس روابط اقتصادی حاکم بین آن دو کشور تنظیم می شود. هر جفت از این کشورها دارای رفتارهای مالیاتی متفاوتی هستند که بدون واسطه ، امکان سرمایه گذاری و حجم نقدینگی در گردش را بالا می برد.

به عنوان مثال پرداخت مستقیم بهره های ناشی از وام های پرداختی یا قرض ها توسط شرکت ژاپنی به شرکت آلمانی ممکنست از نقطه نظر مالیاتی اشتباه و به ضرر شرکت باشد. اما اگر همین مبلغ بطور غیرمستقیم و از طریق انتقال به شرکت هنگ کنگی و سپس انتقال آن از شرکت هنگ کنگی به شرکت آلمانی، پرداخت شود سودآوری برای شرکت را در پی داشته باشد.

همانطور که برای SST فوق الذکر می بینیم با افزودن نقاط اضافی به این مساله می توانیم منجر به کاهش هزینه ها شویم. این نقاط نافع و سودمند در غالب موارد به گراف ما افزوده می شوند. به عنوان مثال می شود برای یک گردش اقتصادی تعدادی از مناطق امن اقتصادی و مالیاتی معروف و شناخته شده مانند هلند، یا جزایر برمودا را مورد استفاده قرار داد و مبالغ فوق الذکر را از کشور ژاپن با کمک کشور واسطه دیگری به کمپانی آلمانی رساند.

ایده فوق الذکر بر مبنای موارد زیر می تواند توسعه یابد:

- مسیر اقتصادی بین کشورها به نحوی انتخاب شود که بالاترین سود را از نظر رفتارهای اقتصادی و مالیاتی آن کشورها ، نصیب شرکت کند.

- نوع خدمات اقتصادی شرکت های تابعه در کشورهای مختلف تغییر یابد. مثلا هزینه خریدن سهام توسط یک شرکت در یک کشور ، به شرکت دیگری در کشور دیگر برای کسب حق الامتیاز تخصیص داده شود.

- برای کسب بهترین نتایج اقتصادی و مالی ، شرکت ساختار نسبتا ثابتی را برای خود برگزیند، که می تواند متشکل از سهامداران و وامداران و ... باشد.

از آنجایی که رفتارهای مالیاتی بسیار پیچیده بوده و قابلیت تبدیل شدن به یک مجموعه از فرمول ها برای تحلیل آنها در مدل های تحقیق در عملیات را ندارد ، برخی برنامه های پویا برای این منظور در نظر گرفته شده است.

قابل ذکر است که فعالیت در این زمینه در اواخر دهه ۱۹۷۰ آغاز شد.

بنابراین اکنون این امکان فراهم شده است که بطور خودکار به تولید بهترین مسیر برای یک جریان خاص اقتصادی بین دو کشور مشخص پردازیم. به عنوان یک نتیجه، بسته های نرم افزاری کامپیوتری وجود دارد که می تواند مشاور و یاور خوبی برای مساله برنامه ریزی چند ملیتی باشد. توجه داریم که یکی از اصطلاحات برانگیزاننده و ترغیب کننده سرمایه گذاران برای سرمایه گذاری در یک کشور، در مساله برنامه ریزی مالیات چند ملیتی، اجتناب از مالیات و معاف بودن از پرداخت مالیات است.

مثال هایی از نظریه گراف و آزمون ۱۹۹۵ UG

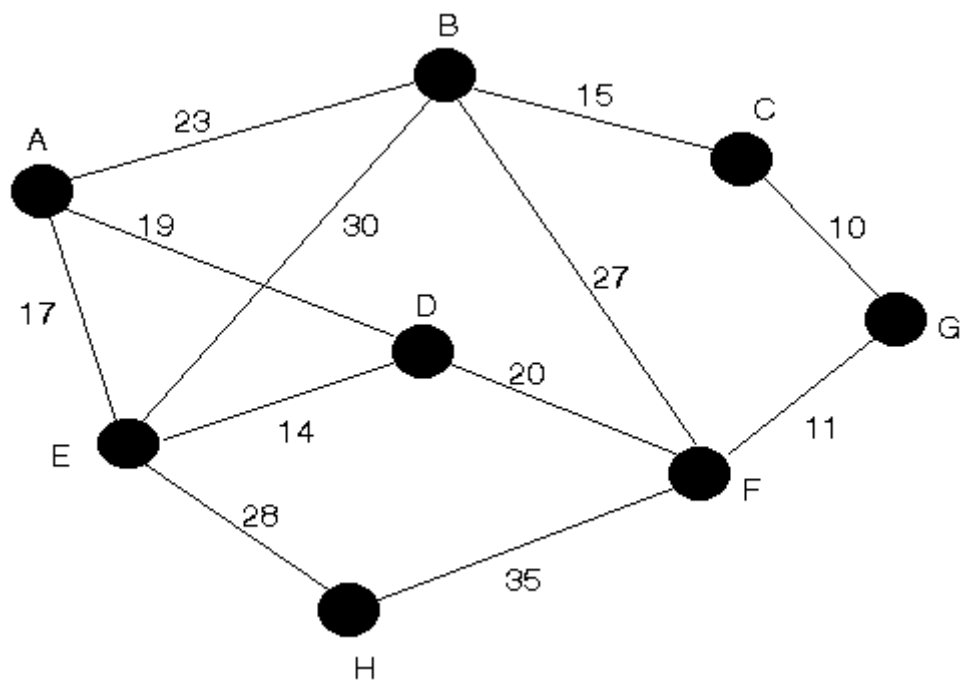
شرکتی قصد ایجاد خطوط گاز رسانی جهت اتصال ۷ چاه A و B و ... و G به پالایشگاه H را

دارد. خطوط لوله ممکن و هزینه هر کدام در لیست زیر ذکر شده است:

هزینه	خطوط لوله
23	AB
17	AE
19	AD
15	BC
30	BE
27	BF
10	CG
14	DE
20	DF
28	EH
11	FG
35	FH

کدام خط لوله را با توجه به جدول فوق الذکر پیشنهاد می کنید و هزینه نهایی خطوط لوله

پیشنهادی شما چقدر است؟



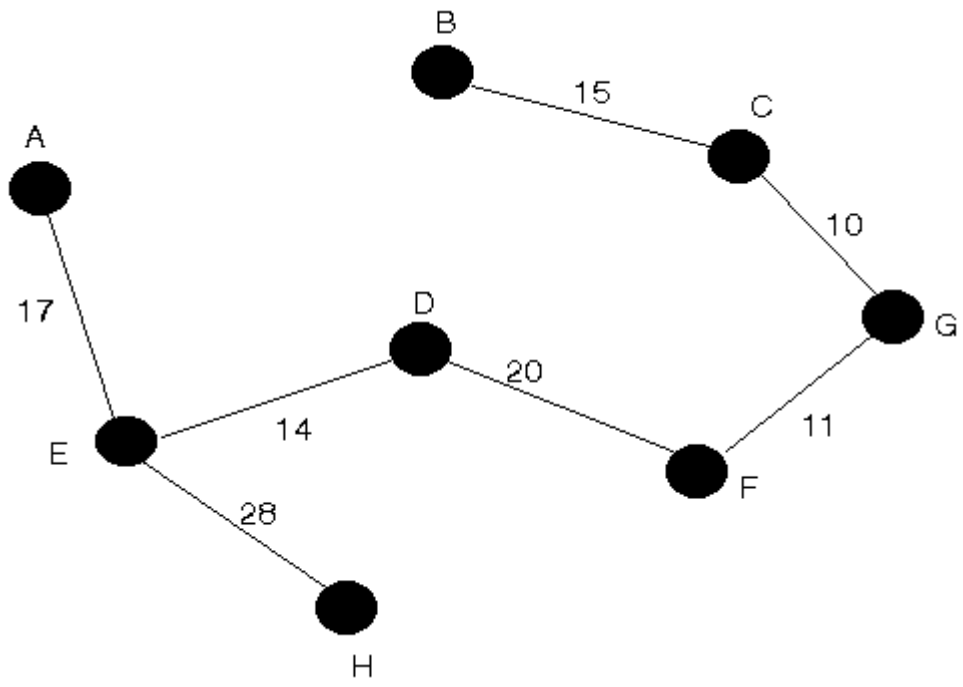
راه حل:

گراف مزبور را در شکل صفحه قبل می بینید. با به کار بردن الگوریتم کروسکال و شروع از کوتاهترین مسیر (کمترین هزینه) خواهیم داشت:

پیوند	هزینه	تصمیم
CG	۱۰	اضافه شود
FG	۱۱	اضافه شود
DE	۱۴	اضافه شود
BC	۱۵	اضافه شود
AE	۱۷	اضافه شود
AD	۱۹	ابطال! تشکیل مدار ADE
DF	۲۰	اضافه شود
AB	۲۳	ابطال! تشکیل مدار ABCGFDE
BF	۲۷	ابطال! تشکیل مدار BFGC
EH	۲۸	اضافه شود

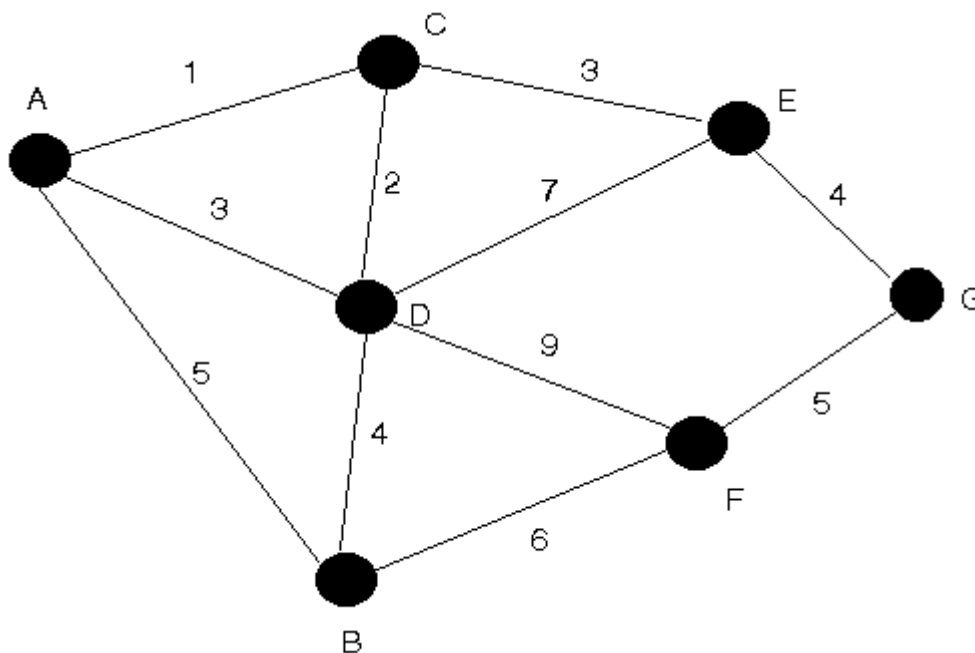
متوقف شو! زیرا ۷ یال به گراف اضافه شد و این تمام آن چیزی است که ما برای گرافی با ۸ راس نیاز داریم.

بنابراین SST بدست آمده دارای هزینه نهایی ۱۱۵ پوند می باشد و ساختار آن مطابق شکل صفحه بعد می باشد:



مثال هایی از نظریه گراف و آزمون ۱۹۹۱ UG

برای گراف نمایش داده در زیر، تمام مقادیر هر مرحله از الگوریتم را برای رسیدن به کوتاهترین پیمایش درختی، محاسبه کنید. اعدادی که در کنار هر یال وجود دارد بیانگر فاصله آن جفت از نقاط می باشد.



راه حل:

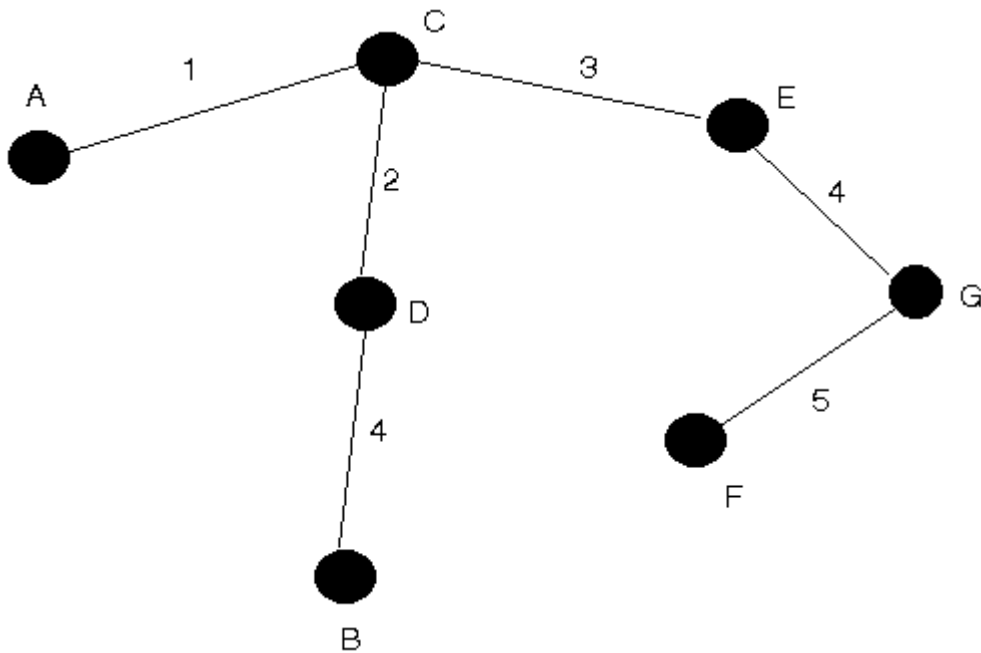
ما مجبور به یافتن کوتاهترین مسیر در گراف هستیم. پس الگوریتم کروسکال را به کار می بریم. با شروع از کوتاهترین مسیر (کمترین هزینه) خواهیم داشت:

پیوند	طول	تصمیم
AC	۱	اضافه شود
CD	۲	اضافه شود
CE	۳	اضافه شود
AD	۳	ابطال! بدلیل تشکیل مدار A-C-D-A
DB	۴	اضافه شود
EG	۴	اضافه شود

ابطال! بدلیل تشکیل مدار A-D-B-A	۵	AB
اضافه شود	۵	GF

توقف کن! زیرا ۶ یال ایجاد شد و این تمام چیزی است که برای SST گرافی با ۷ راس به آن نیاز داریم.

SST مزبور در شکل زیر نشان داده شده و دارای طول مجموع $1+2+3+4+4+5=19$ است.



مثال هایی از نظریه گراف و آزمون ۱۹۸۵ UG

شرکتی دارای ۸ کارگاه در موقعیت های A و B و C و D و E و F و G و H است که دارای

مختصات اقلیدسی به شرح زیر می باشند:

A : (50 , 40)

B : (90 , 10)

C : (50 , 70)

D : (50 , 80)

E : (90 , 50)

F : (30 , 80)

G : (50 , 20)

H : (10 , 60)

این کارگاه ها قرارست با کمک خطوط تلفن استیجاری شرکت مخابراتی انگلیس به یکدیگر متصل

شوند. هزینه اجاره یک خط تلفن بین دو نقطه ۵۰ پوند در هر سال برای هر کیلومتر است.

طول خطوط مورد نظر بر حسب مختصات اقلیدسی آنان قابل محاسبه است. زیرا خطوط مستقیم را

در نظر می گیریم. یک پیغام بین یک کارگاه به کارگاه دیگر تنها از طریق خطوط استیجاری منتقل

خواهد شد و اگر لازم باشد از آنجا بوسیله مرکز مخابراتی که در محل برخورد خطوط تعبیه شده

است به خط دیگری انتقال می یابد.

۱- فرض کنید که مراکز انتقال تنها می توانند در خود کارگاه ها وجود داشته باشند. کمترین

هزینه ممکن برای خطوط استیجاری چقدر است و این شبکه به چه صورت باید ایجاد

شود؟

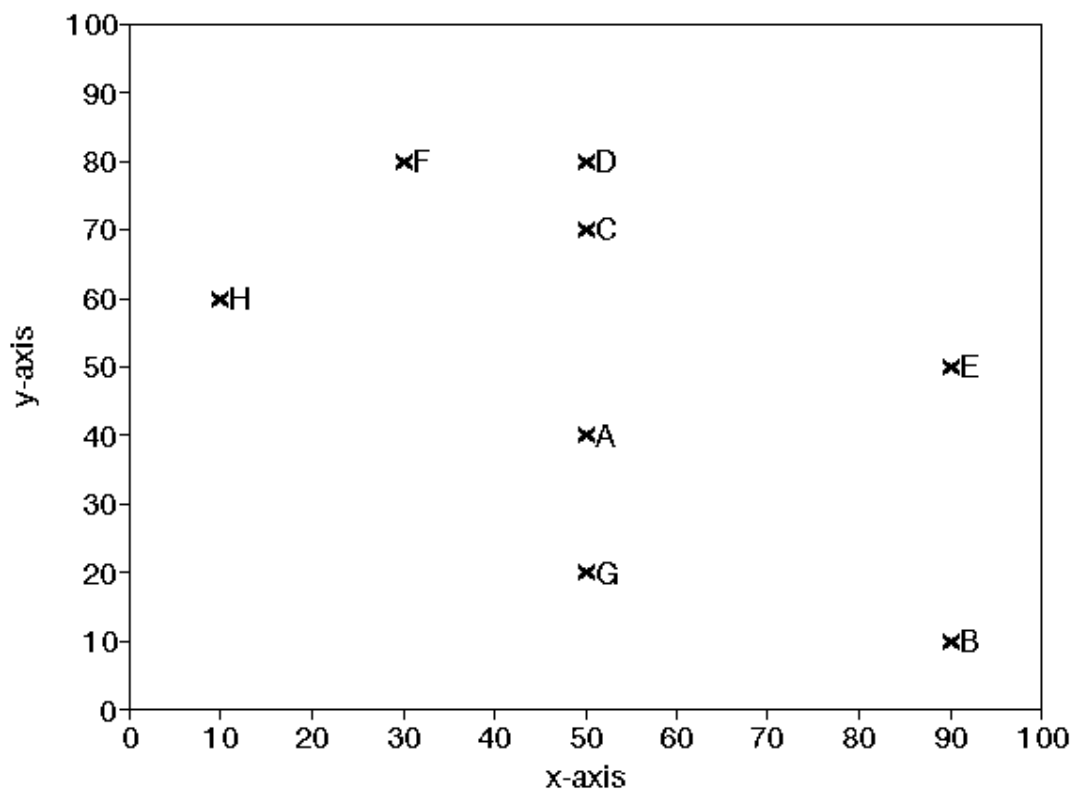
۲- اگر مراکز انتقال پیام را بشود در هر کنجای صفحه اقلیدسی جای داد، یک مرکز تلفن برای

کاهش هزینه پیشنهاد دهید

۳- در مورد نقایص موجود بین شبکه های تلفنی ایجاد شده در موارد ۱ و ۲ بالا بحث کنید.

راه حل:

موقعیت های مورد اشاره در زیر نشان داده شده است:



ما باید در پی یافتن کوتاه ترین پیمایش برای این درخت (SST) باشیم. پس با به کار گیری

الگوریتم کروسکال و شروع از کوتاه ترین مسیر خواهیم داشت:

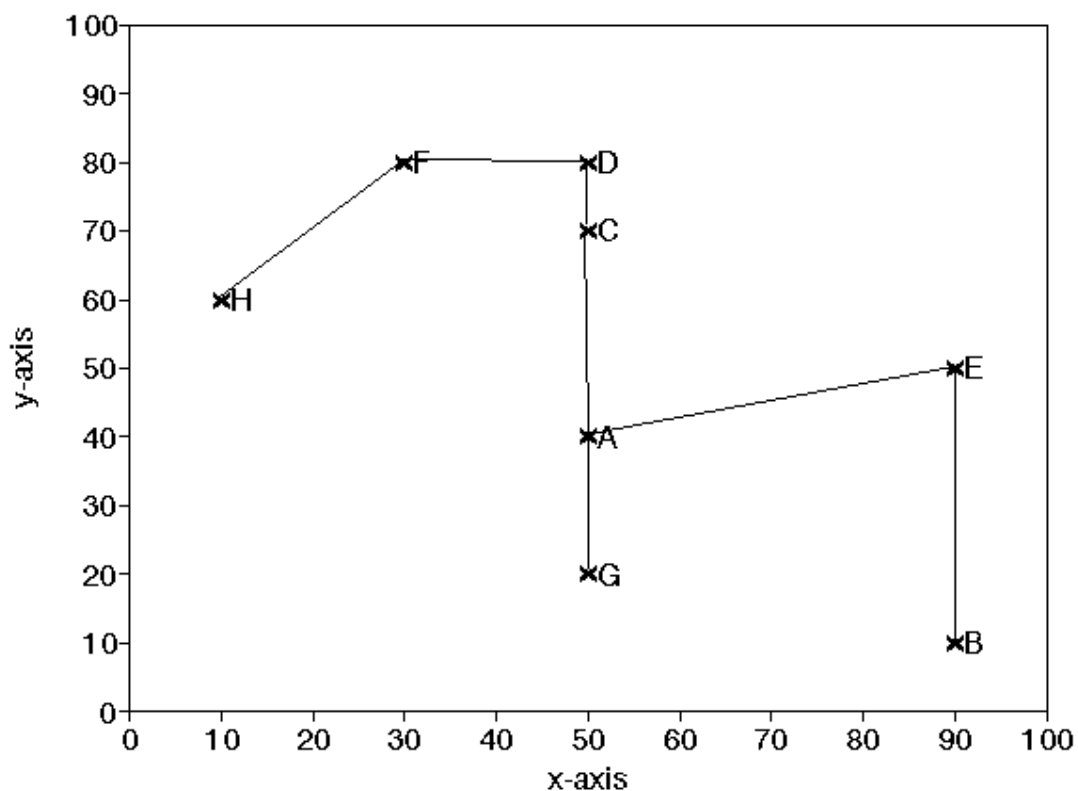
تصمیم	طول	پیوند
اضافه شود	۱۰	CD
اضافه شود	۲۰	DF
اضافه شود	۲۰	AG
ابطال! بدلیل تشکیل مدار DFCD	۵۰۰	CF
اضافه شود	۸۰۰	FH
اضافه شود	۳۰	AC
اضافه شود	۴۰	BE

AD ۴۰ ابطال! بدلیل تشکیل مدار ADCA

AE ۱۷۰۰ اضافه شود

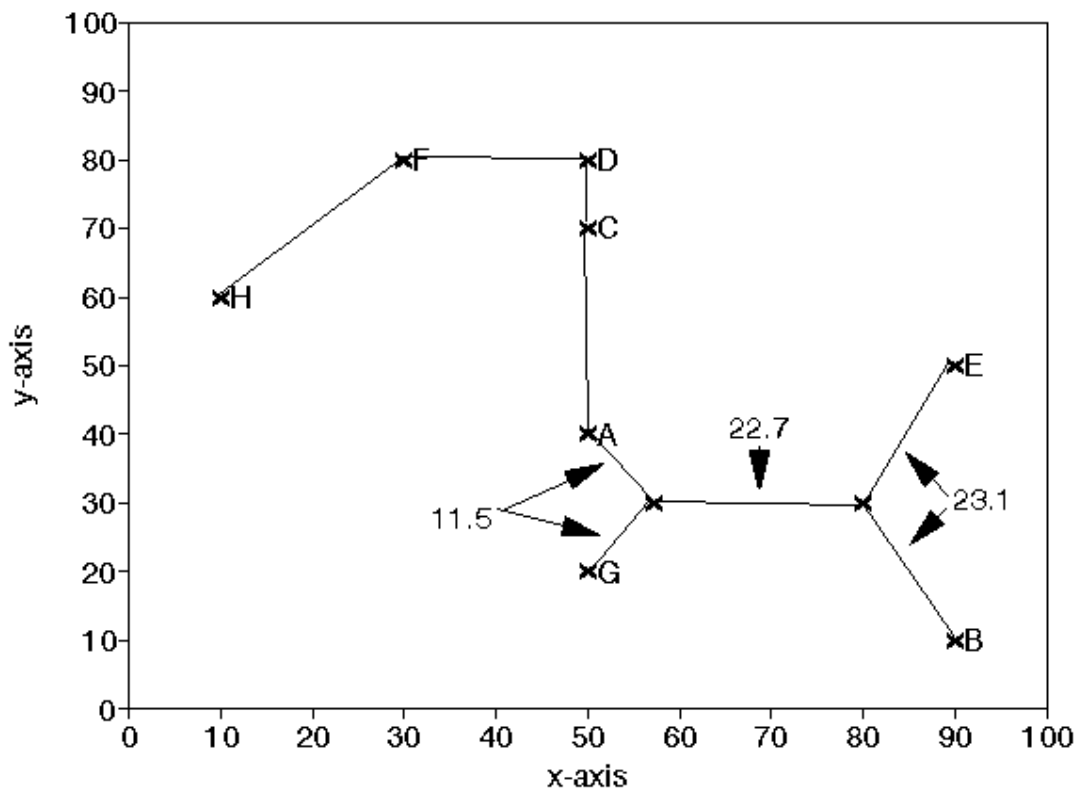
توقف کن! زیرا ۷ یال اضافه شد و این تمام چیزی است که برای بدست آوردن SST برای یک گرافی با ۸ راس به آن نیاز داشتیم

SST گراف مزبور در شکل زیر نمایش داده شده است و توجه داریم که می توانستیم به جای GB از AE استفاده کنیم.



هزینه مجموع این SST برابر با ۹۴۷۵/۷۷ پوند خواهد بود.

اگر ما به دنبال افزودن راس اضافه یا همان راس استینر باشیم یکی از حالت های ممکن برای چنین راسی در شکل پایینی نمایش داده شده است:



در این گراف دو راس استینر با علامت ضربدر مشخص شده اند.

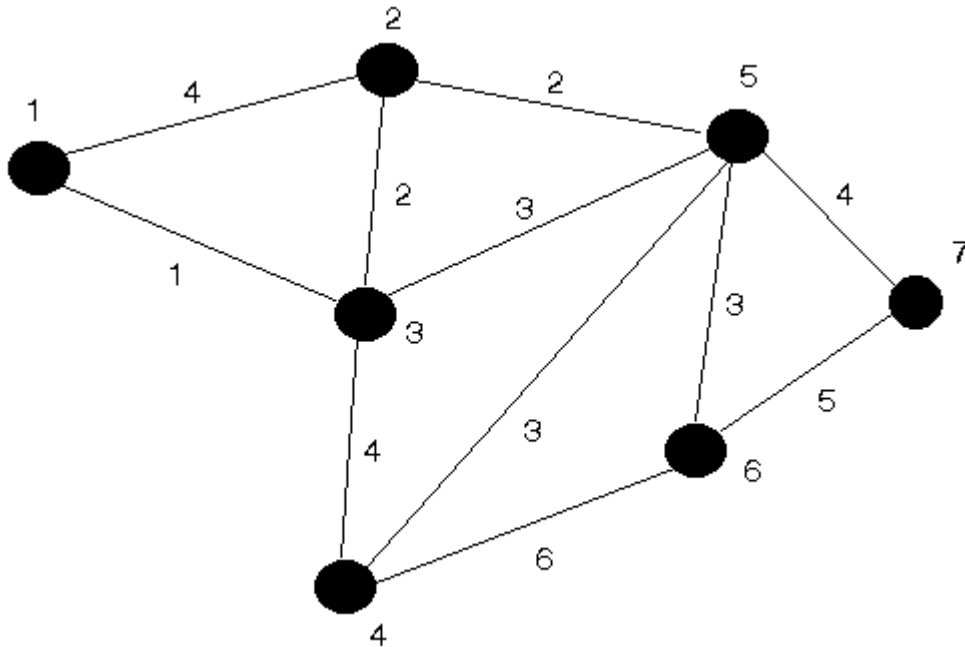
توجه کنید که در رئوس استینر بین سه یالی که به هم رسیده اند زوایای ۱۲۰ درجه بوجود آمده است. هزینه گراف نشان داده شده در شکل بالا تقریباً برابر با $9009/21$ پوند است.

نقایص اساسی شبکه خطوط تلفنی بالا بصورت زیر است:

- خطوط تلفن به هر جا که بخواهیم بروند (یعنی الزاماً روی یک مسیر مستقیم نباشند)
- این شبکه نسبت به ایجاد نقص در یکی از رئوس یا یال ها بسیار آسیب پذیر است.
- در حالتی که رئوس استینر را اضافه می کنیم باید هزینه مراکز انتقال اضافی را در برابر صرفه جویی هایی که از این شبکه عایدمان می شود در نظر بگیریم.

مثالی از نظریه گراف

برای گراف نشان داده شده در شکل زیر کوتاه ترین پیمایش این درخت را بیابید:



راه حل:

الگوریتم کروسکال را به کار می بریم که در آن برای گرافی با n راس کافی است تا تنها $n-1$ یال

را با شرط عدم ایجاد مدار در گراف، به آن اضافه کنیم.

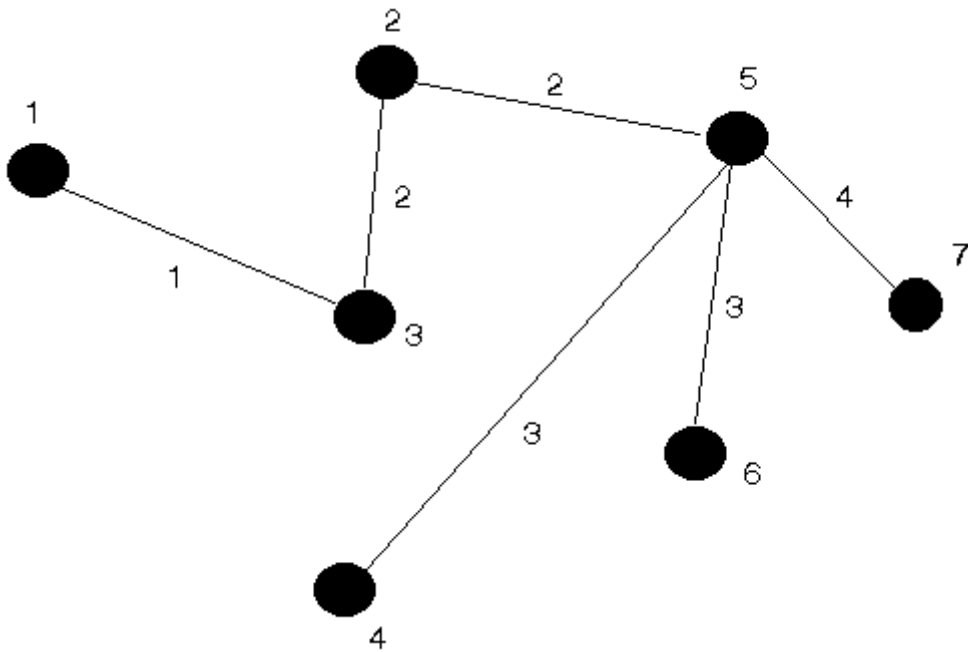
بنابراین اگر یال ها را با توجه به افزایش طول آنها مرتب کنیم خواهیم داشت:

یال	طول	تصمیم
۳-۱	۱	اضافه شود
۳-۲	۲	اضافه شود
۵-۲	۲	اضافه شود
۵-۳	۳	ابطال! بدلیل تشکیل مدار ۲-۵-۳
۵-۴	۳	اضافه شود

اضافه شود	۳	۶-۵
ابطال! بدلیل تشکیل مدار ۲-۵-۴-۳	۴	۴-۳
اضافه شود	۴	۷-۵

توقف کن! زیرا ۶ یال اضافه شد و این تمام چیزی است که برای SST گرافی با ۷ راس به آن احتیاج داشتیم.

مجموع طول SST بالا برابر با ۱۵ واحد خواهد شد و این SST بصورت زیر خواهد بود:



فرجام:

بررسی های به عمل آمده در زمینه به کارگیری الگوریتم کروسکال در حل مسائل SST بیانگر آنست که در تمام این مسائل که غالباً در تناظر با یک گراف قرار می گیرند، الگوریتم کروسکال با افزودن یال ها به تعداد یکی کمتر از تعداد رئوس و با شروع از یال دارای کمترین طول یا کمترین هزینه و با شرط عدم پدید آمدن دور در گراف، منجر به تشکیل درختی می شود که تمام رئوس گراف را در بر می گیرد و هزینه نهایی آن نیز در کمترین مقدار ممکن می باشد.

استفاده از الگوریتم کروسکال در مسائلی که ساختار گرافی داشته و در آنها به دنبال کاهش هزینه و صرفه جویی هستیم با لحاظ کردن پاره ای از ملاحظات مربوط به هر مساله، منجر به بهینه سازی مساله برای کسب حداقل هزینه ها می شود.

البته در این میان باید موارد مهمی نظیر آسیب پذیری شبکه در برابر ایجاد نقص در هر یک از یال ها یا هر یک از رئوس را نیز در نظر گرفت.

گاهی افزودن رئوس استینر به گراف، باعث کاهش طول نهایی آن می شود اما در چنین شرایطی باید این نکته را از نظر دور نداشت که هر راس استینر در عالم واقعیت متناظر با ایجاد یک مرکز دیگر است و باید بررسی های لازم بعمل آید که آیا با کاهش طول گراف و ایجاد یک مرکز جدید صرفه جویی قابل توجهی اتفاق می افتد؟ چرا که گاهی ممکن است هزینه ایجاد یک مرکز جدید بیشتر از هزینه صرفه جویی شده برای کوتاه کردن طول مسیرها باشد که در این میان سودآوری وجود نخواهد داشت.

الگوریتم کروسکال و الگوریتم های مشابه دیگری نظیر الگوریتم کریستوفیدز برای دست یابی به جواب بهینه در گراف ها بوجود آمده و همچنان در حال توسعه می باشند.