

دهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران

یزد - ۲۲ الی ۲۵ مردادماه ۱۳۸۷

هندسه پویا و بهبود درک و استدلال هندسی دانش آموزان

میلاد افشین منش

مدرسه راهنمایی دانش

math@mafshinm.com

چکیده

نرم افزارهای هندسه پویا، با در اختیار قرار دادن امکان بررسی طیف وسیع تری از مثال ها، مرز استدلال استقرایی و استنتاجی را کمرنگ کرده و راه را برای رسیدن از استقرا به استنتاج، هموارتر کرده اند که این امر سبب بهبود درک هندسی دانش آموزان و همواری بیشتر مسیر آنها در رسیدن به استدلال های رسمی هندسی شده، و با افزایش قدرت تخیل و همچنین تفکر بازتر، موجب افزایش توانایی حل مساله در آنان، با به کارگیری هندسه پویا در آموزش، شده است.

واژه های کلیدی: هندسه پویا - آموزش هندسه - نرم افزارهای آموزشی - درک هندسی

۱- مقدمه

شاید در هیچ دوره ای از زمان، بهره گیری از تکنولوژی تا این حد، مرسوم نبوده که حتی کودکان دبستانی نیز مفاهیم ابتدایی رایانه را درک کرده و آن را به درستی به کار برند. بازی های رایانه ای، ورود به محیط های گفتگو، پایگاه های آموزشی، تفریحی و خبری و یا شرکت در کلاس های مجازی^[۱]، حاکی از عزم جزم نسل آینده برای بهره مندی هرچه بیشتر از این دستاورد بشری است.

با چنین حجمی از تغییرات، پیمودن مسیر یاددهی و یادگیری با توشه ای از رویکردهای آموزشی گذشته، دست یابی به مقصود نهایی را به تأخیر انداخته و بهبود آموزش، با توجه به ابزارهایی که نسل حاضر با آن درگیر است، امری لازم و غیرقابل اجتناب به نظر می رسد. بهبودی که درک صحیح تر دانش آموزان از محیط پیرامون را به همراه دارد.

۲- سیر تکامل آموزش هندسه

آموزش هندسه، بخصوص در قرن گذشته، دوره های متمایزی را پشت سر نهاده است. بطوریکه تأثیر هر دوره، در تکامل و بهبود آن، قابل توجه می باشد.

اولین رویکرد آموزشی، بر مبنای «هندسه اصل موضوعی» شکل گرفت که در آن دانش آموز با درک معنای «اصل» به سراغ اصول اقلیدس می رفت و کار را با «تعریف نشده» ها در هندسه، آغاز و با «تعریف شده» ها ادامه می داد.

در این رویکرد، قضیه اول از اصول اقلیدس نتیجه می شد و قضیه دوم از اصول اقلیدس به همراه قضیه اثبات شده اول و همین طور الی آخر^[۲].

کسب مهارت برای ارائه استدلال های اصیل هندسی، در این رویکرد، با دشواری بسیار روبرو بوده و تا چندین ردیف از دیوار هندسه در مقابل چشمان دانش آموز، بالا نمی آمد و خود شاهد نحوه استدلال کردن معلم نبود، نمی توانست آجری را شخصاً به روی آجرهای دیگر قرار دهد. با پیمودن چنین مسیری در آموزش، دست یابی به اهداف غایی، که از جمله مهم ترین آنها، فرضیه سازی توسط دانش آموز است، به تأخیر می افتاد و علاوه بر آن، ذهنیت استقرایی دانش آموز، در ابتدای مسیر یادگیری هندسه، دچار چالش جدی می شد. به نمونه زیر توجه کنید:

برای اثبات «همرسی عمود منصف ها در هر مثلث»، مثلث دلخواهی می کشیم و همرسی عمودمنصف ها را در آن ثابت می کنیم و بعد حکم کلی را به اینصورت اعلام می داریم که: «چون ما در مثلث دلخواهی حکم را ثابت کردیم پس به طور کلی در هر مثلث، عمود منصف ها همرسند»، و این خود تناقضی آشکار است!

چرا که با قرار گرفتن هر رأس مثلث در موقعیت مشخص شده ای از تخته سیاه و نسبت به رئوس دیگر، دلخواه بودن مثلث، بی معنا می شود و همواره گوشه ذهن دانش آموزان درگیر باقی می ماند، که: «حکم ما برای این مثلث به سرانجام رسید. چه تضمینی برای مثلث دوم وجود دارد؟» یا «چگونه برقراری حکم در مثلث ۱۰۰-ام را ضمانت می کنید؟»

اختلالات یادگیری بوجود آمده و نرسیدن بسیاری از دانش آموزان به مراحل بالای یادگیری، موجب انتقال نگرش «هندسه اصل موضوعی» به مقاطع بالاتر تحصیلی شد.

تجربه گرایی و بررسی چندین مثال مفید و سپس اثبات قضایا بطور استنتاجی - و آن هم در صورت لزوم - موجب پدیداری آموزش هندسه با رویکرد «هندسه استقرایی» شد.

روش فعال، که در آن دانش آموز با بررسی چندین نمونه مفید و همچنین بحث هدایت شده در گروه های دانش آموزی، سعی در کشف الگوی حاکم بر مساله داشته و پس از کسب نتیجه ابتدایی توسط وی، اثبات استنتاجی آن ارائه می شود، دستاورد هندسه استقرایی است.

چنین رویکردی، منجر به درک بهتری از قضایا، نسبت به رویکرد سابق خود شد و موجب نزدیکی و تعامل جدی، میان تجربه و اثبات شد. اگرچه هنوز هم نقائصی بر سر راه آموزش هندسه، خودنمایی می کرد! به نمونه زیر توجه کنید:

برای بررسی «همرسی عمود منصف ها در مثلث»، دانش آموز چندین مثلث مختلف را ترسیم می کند و همرس شدن عمودمنصف ها را در هر مورد، مطالعه می کند. واضح است که اگر دانش آموز، در ترسیم حتی یک عمودمنصف، دچار خطا شود، نتیجه مورد نظر بدست نخواهد آمد!

علاوه بر آن، اگرچه تعدد مثال‌ها، راه را برای الگویابی و سپس فرضیه‌سازی می‌گشاید، اما احتمال پنهان ماندن یک مثال نقض یا یک حالت خاص از چشم دانش‌آموز، سبب بوجود آمدن فرضیه‌های نادرست بسیاری خواهد شد. فرضیه‌هایی که دانش‌آموز، ابزاری برای بررسی صحت آنها با دید استقرایی‌اش را ندارد. زیرا او نمی‌تواند بی‌نهایت مثال را ترسیم و صحت حکم را در تمام آنها مورد مطالعه قرار دهد.

سربر آوردن فناوی‌های نوین، آموزش‌های هندسه را دستخوش تحولات جدی کرد. اشکالی که تاکنون، «سکون بر روی تخته یا کاغذ» جزء لاینفک آنان بود، بر روی نمایشگرها امکان چرخش و جابجایی یافتند. همچنین ساخت بلافاصله و سریع نمونه‌ها، فرصت الگویابی و کشف قوانین را در اختیار دانش‌آموزان قرار داد و «استقرای ریاضی» که با بررسی تعداد هرچه بیشتری از مثال‌ها، معنا می‌یافت به مفهوم حقیقی خود، نزدیک‌تر شد.

جابجایی آزادانه موقعیت رئوس اشکال در محیط نرم افزار و تغییرات بدون قید و بند طول پاره‌ها و رهایی موجودات هندسی، از محل رسم اولیه آنان، سبب شد تا اصطلاح «یک شکل دلخواه»، معنای واقعی‌تری به خود بگیرد.

مرحله اخیر در آموزش هندسه که به نام «هندسه پویا» خوانده می‌شود، در عین در اختیار قرار دادن نگاه عینی و دید شهودی از قضایا، با تولید حجم انبوهی از مثال‌های قابل اعتماد در هر زمینه، علاوه بر یاری رساندن به فرضیه‌سازی‌های صحیح‌تر دانش‌آموزان، مرز بین استدلال استقرایی و استدلال استنتاجی را کمرنگ و کمرنگ‌تر کرد.

شاید دیگر اکنون متقن‌ترین اثبات برای یک دانش‌آموز از قضیه هم‌مرسی عمودمنصف‌ها، توالی پی در پی نمادهای ریاضی که به اسم اثبات استنتاجی، پشت سر هم و با ترتیب معینی آمده‌اند، نباشد. بلکه مثلثی باشد که به همراه عمود منصف‌های اضلاعش، در محیط نرم افزار ترسیم شده است و وی با موشواره (mouse)، رئوس مثلث را به‌طور آزادانه و در طیفی پیوسته، در تمام صفحه جابجا کرده و انواع مثلث‌ها را می‌سازد و می‌بیند که حتی در یک مورد نیز، حکم گفته شده نقض نمی‌شود!

به نظر می‌رسد که رویکرد «هندسه پویا» در بررسی و اثبات قضایا، با تجربیات انسان از جهان واقعی - که بیشتر بصورت مشاهده چندین پدیده و سپس نتیجه‌گیری حکمی در مورد آنها است - قرابت بیشتری دارد و راهگشای درک بالاتری از هندسه است.

۳- فروریزی ساختارهای اولیه و پی‌ریزی مجدد آنها

بر طبق عقاید زیباشناختی، میل درونی انسان به زیبایی، سبب‌گرایش او به سوی اجسام کامل و متقارن می‌شود. چنین تمایلی، خواه ناخواه، سبب افزودن برخی قیود ناضرور، بر تصاویر ذهنی می‌شود.

مثلاً دانش‌آموز در فرآیند مطالعه یک متن هندسه و یا حل مسائل هندسی، هم‌زمان با برخورد با واژه «مثلث»، شکل منظمی از مثلث - که در بیشتر مواقع مثلث متساوی‌الاضلاع بوده یا نهایتاً مثلث متساوی‌الساقین است - در ذهنش نقش می‌بندد.

پیدایش چنین قیودی در ذهن، سبب می شود تا حالت های مختلفی از مثلث، که ممکن است منجر به حل مساله شود، از نظر وی پنهان بماند. همچنین بی توجهی نسبت به شکل گیری این قیود، باعث می شود تا به مرور زمان، وی همواره قیود اضافه ای را بر تصاویر ذهنی خود اعمال کرده و به کاهش تدریجی خلاقیت اش تن در دهد.

محیط نرم افزار، با قابلیت جابجایی آزادانه نقاط و ترسیم های بی قید و شرط، باعث پدیدار شدن حالات دور از ذهن و نسبتاً عجیب اشکال هندسی، در مقابل چشمان دانش آموز می شود که با پیراستن قیود اضافه از ذهن وی، موجب تفکر بازتر و به کارگیری تخیل و ابتکار عمل بالاتری خواهد شد. همچنین از سوی دیگر، وی را متوجه ثابت ماندن ویژگی های اصیل هر دسته از اشکال خواهد کرد.

مثلاً درک نتیجه شده از تجربه دانش آموز، از اینکه در یک چهارضلعی تنها ویژگی اصیل و ثابت، دارا بودن ۴ ضلع است و بس! دستاورد نسبتاً قابل توجهی است.

چرا که توازی یا تساوی اضلاع می تواند با جابجایی رؤس از بین برود. اگرچه در حالت کلی، کشف ویژگی های اصیل اشکال، که با جابجایی اجزا، همچنان ثابت می ماند، توسط دانش آموز، کمی دشوار به نظر رسیده و نیازمند گذر زمان و هدایت های معلم و دست ورزی بیشتر او، با نرم افزار است.

عنایت به یک نکته در شروع کار، امر آموزش را با هدایت صحیح تر معلم به پیش خواهد برد و آن «پذیرفتن سردرگمی»، در برخورد اولیه دانش آموزان با محیط پویای نرم افزار است.

عادت به ایستایی و سکون اشکال، بر روی کاغذ و تخته، موجب سردرگمی هایی در تجربیات نخستین دانش آموزان خواهد شد. این سردرگمی تا زمان از بین رفتن مدل های کلیشه ای اشکال هندسی در ذهن، ادامه خواهد یافت و آن زمانی خواهد بود که وی مثلاً واژه «مثلث» را معادل با انواع بسیار متنوعی از مثلث ها قرار دهد و طرح یک مثلث در ذهنش را از مثلث نقاشی شده بر روی کاغذ، مجزا کند.

۴- انطباق بیشتر روش فعال با شهود ناشی از نرم افزار

از زمان طرح این جمله از جان دیویی که «هیچگاه یک ایده، نمی تواند بصورت یک ایده، از معلم به دانش آموز منتقل شود. دانش آموز، ایده انتقالی را به عنوان یک حقیقت خواهد پذیرفت و نه یک ایده»، تلاش پژوهشگران معتقد به این سخن، بر اجرای روش های فعال در آموزش و پرهیز هرچه بیشتر از مستقیم گویی و کمک به کشف مفاهیم توسط دانش آموزان بوده است.

اما لازمه اجرای روش های فعال، نمایش مثال هایی با تعداد هر چه بیشتر، در مقابل دانش آموزان است تا شخصاً به کشف الگوها و روابط حاکم بپردازند.

دو سوال زیر را در نظر بگیرید:

الف- ثابت کنید که نیمساز زوایای درونی هر مثلث، در یک نقطه، همرس اند.

ب- آیا نیمساز زوایای درونی هر مثلث، در یک نقطه همرس اند؟ چرا؟

نگرش موجود در کدام سوال، به اهداف تعیین شده در آموزش ریاضی نزدیک تر است؟
کدام سوال، ذهن دانش آموز را در فضای فعال تری قرار می دهد و مستقیم گویی، در آن کمتر است؟

سوال دوم با ایجاد شک در ذهن دانش آموز، وی را به سمت بررسی صحت گزاره، پیش از شروع به اثبات آن، سوق می دهد و دست و پنجه نرم کردن با مساله باعث می شود تا یادگیری پایدارتری حاصل شود. در حالی که در سوال اول، بصورت کاملاً انتقالی - و نه اکتشافی و فعال - این حقیقت که «نیسماز زوایای درونی هر مثلث، حتماً همسرند» به دانش آموز منتقل شده است.

پس اصالت و اولویت در آموزش، با سوال دوم است.

اما چه موقع می توان سوال هایی از نوع سوال دوم را مطرح کرد؟ چه موقع می توان دانش آموزان را به سمت استقرا، به معنای واقعی آن - که همان بررسی مثال های بسیار است - هدایت کرد و سپس از آنان انتظار نتیجه داشت؟

واضحست که لازمه کشف الگوها توسط مغز، دیدن نمونه دوم، قبل از فراموشی نمونه اول است و همچنین دیدن نمونه سوم، در حالیکه هنوز سایه ای از نمونه اول و دوم در ذهن است و الی آخر. اما آیا دانش آموز در تمام مسائل درگیر می تواند طیف تقریباً پیوسته ای از نمونه ها را در زمان کوتاه، بوجود آورده و به نحوی بررسی کند که الگوی حاکم بر آنها را کشف کند؟

همانگونه که ماشین حساب، در کشف الگوهای عددی، یاری رسان دانش آموز است، در تولید نمونه های هندسی و کشف الگوی نهفته در اشکال نیز، نیازمند هندسه پویا هستیم. دانش آموزی که در محیط نرم افزار، نیمساز زوایای درونی مثلثی را رسم کرده است و می بیند که در یک نقطه به هم می رسند و با تغییرات دلخواه و پی در پی رئوس مثلث و بوجود آمدن انواع مثلث ها، همرسی بوجود آمده، به هم نمی خورد، به شهود «همرسی نیمساز زوایای درونی هر مثلث» پیش از اثبات استنتاجی آن خواهد رسید.^[۲]

۵- نگاه معلم و جایگاه وی در مواجهه با تغییرات

آیا ترس «فاصله گرفتن از اثبات های رسمی مدرسه ای» باید سبب آن شود که معلم، تجربه برخورد با محیط پویای نرم افزار را به دانش آموزانش نهد و استدلال تصویری را توجیه آنها برای فرار از استدلال های متقن هندسی بداند؟

در پاسخ به این سوال باید گفت که در هندسه ثابت، هیچ تصویری جایگزین برهان استنتاجی نمی شود، زیرا ممکن است مواردی از این تصاویر، بررسی نشده باقی بمانند. اما کمیت تصاویر در هندسه پویا این شرایط را برای دانش آموزان فراهم می کنند که پس از بررسی بی شمار حالت قرار گیری اشکال، با اطمینان بیشتری، فرضیات خود را ارائه دهند. فرضیاتی که با دلایل تصویری، قابل تایید یا رد هستند.

از سوی دیگر، حتی اگر نتوانیم این دید شهودی و این تعداد بسیار زیاد مثال‌ها را برهانی بر اثبات قضایا بدانیم، لاقلاً می‌توانیم آن را مقدمه‌ای بسیار مناسب برای نزدیک شدن به استدلال استنتاجی بدانیم.

همانطور که در یک راهپیمایی، نشان دادن مقصود نهایی، مشوق مناسبی برای طی کنندگان مسیر است، یکی از بهترین مسیرها، برای نیل موفق به اثبات استنتاجی یک قضیه، دیدن شهودی نتیجه، قبل از اقدام به استدلال، با زبان علائم است.

اکنون همانگونه که در کتب درسی بازنگاری شده ریاضی دوره راهنمایی، «رسم شکل» به عنوان یکی از راهبردهای حل مساله، وارد شده است، متن توضیحی کتاب را که در ذیل این راهبرد آمده است، با افزودن عباراتی به آن و با توجه به تاثیر شگفت‌انگیز هندسه پویا، از نو بیان می‌دارم و بر بعضی از جملات با زیرخط کردن آنها، تأکید می‌کنم:

«کشیدن شکل مناسب برای مساله‌ها، طبیعی‌ترین راهبردی است که در حل مساله به ذهن می‌آید. این کار به فهم بهتر مساله [و صورت قضایا] و پیدا کردن راه حل آن [و یا اثبات قضایا] کمک می‌کند. گاهی مساله با کشیدن شکل به طور کامل حل می‌شود [و یا قضیه با بررسی تعداد بسیار زیاد و نسبتاً کافی از مثال‌ها، اثبات می‌شود] و به نوشتن عملیات ریاضی نیازی نیست.»^[۴]

معلمی که ورود فناوری به کلاس درس‌اش را پذیرفته است و نقش خود را از انتقال دهنده مطالب، به هدایت‌کننده روند یادگیری تغییر داده است، در جریان آموزش هندسه با ابزارهای هندسه پویا، نقش خود را جوینده مثال‌های نقض در نمونه‌ها و نمایش آن در برابر دانش‌آموزان تعریف می‌کند.^[۵]

چه بسا با قرار دادن رأس مثلث در یک موقعیت ویژه، یک مثال خاص و یا یک مورد نقض پدیدار شود و معلم با تسلط و اشرافی که بر قضیه مذکور دارد، در صورت نرسیدن دانش‌آموزان به آن مثال نقض، می‌تواند توجه ایشان را به بررسی آن مورد نیز جلب نماید.

۶- نتیجه‌گیری:

با توجه به تغییرات کتب درسی ریاضی بر مبنای تدریس به روش فعال، توجه ویژه به هندسه پویا، با نظر به ویژگی‌های یاد شده و همچنین موقعیت و سواد کنونی دانش‌آموزان در بهره‌گیری از رایانه و فناوری‌های نوین، از ضروریات انکارناپذیر آموزش در سال‌های اخیر است.

علاوه بر آنکه، در بسیاری از موارد می‌توان نقض یا کمبود وسائل کمک آموزشی در مدرسه را با کمک شبیه‌سازی‌های نرم‌افزاری، به خوبی جبران کرد.

بنابراین بهره‌گیری صحیح از هندسه پویا و تلفیق هوشمندانه آن با برنامه‌درسی، به جهت تسهیل یادگیری و تعمیق آموخته‌های قبلی و بعدی، پیشنهاد می‌گردد.

شاید بهتر آن باشد که به جای تعریف مهارت‌های راهبری رایانه برای هر معلم، که شامل یادگیری نرم‌افزارهای ورد (word) و پاورپوینت (power point) و اکسل (excel) و آکسس (access) و ... است، تعریف دیگری از راهبری کامپیوتر برای معلمان، و بخصوص

معلمان ریاضی، ارائه کنیم و آن، میزان مهارت معلم مزبور در استفاده از نرم افزارهای آموزشی ریاضی و به خصوص نرم افزارهای هندسه پویا باشد.

در این صورت بسیار شایسته است اگر آموزش و پرورش، با صرف زمان لازم برای تحقیق و پژوهش بر روی حدوداً ۴۰ نرم افزار موجود در زمینه هندسه پویا، بهترین آنها را از نظر تناسب با مقاطع تحصیلی و کتب درسی و نیز سایر ملاحظات لازم، انتخاب و آموزش آن را در کنار مهارت های راهبری رایانه و حتی پر رنگ تر از آنها، به معلمان مقاطع مختلف آغاز کند.^[۶]

شایسته تر آن است که نرم افزار یکسانی برای تمام مقاطع تحصیلی انتخاب شود تا با افزایش مقطع تحصیلی، میزان مهارت دانش آموزان در بهره گیری از نرم افزار، افزایش یابد.

مراجع:

- ۱- افشین منش، م. واقعی و مجازی، مجله رشد مدرسه فردا، دوره ۴، شماره ۷، فروردین ۱۳۸۷، صص ۹ تا ۱۱
- ۲- افشین منش، م. امین الرعایا، س. وبلاگ «هندسه پویا، تحقیق و توسعه روش های پویای آموزشی»، <http://dynamicgeometry.blogfa.com>
- ۳- افشین منش، م. کجویی، ا. هندسه پویا، تلفیق موفق ICT با برنامه درسی، نهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران، ۱۹-۱۷ شهریورماه ۱۳۸۶
- ۴- کتاب درسی ریاضی آموزش و پرورش جمهوری اسلامی ایران، سال دوم راهنمایی
- ۵- افشین منش، م. پهلوزاده، ع. وبلاگ، بستری برای آموزش پویا، هشتمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران، ۲۶-۲۴ مردادماه ۱۳۸۵
- ۶- افشین منش، م. کلاس ما جمعه ها هم دایر است، مجله رشد مدرسه فردا، دوره ۴، شماره ۷، فروردین ۱۳۸۷، صص ۱۲ تا ۱۷